VITTORIO EM. III

FONDO PIZZOFALCONE

REALE OFFICIO TOPOGRAFICO

BIBLIOTECA PROVINCIALE

3-B-5

Armadio XXX

Palchetto

Num.° d' ordine 1345

NAZIONALE
B. Prov.
I
430
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III
NAPOLI

B. P
I
430

Digitized by Google

Digitized by Google

606586

LEÇONS

DE

GÉOMÉTRIE

INDUSTRIELLE,

PAR

L. L. VINCENOT,

Professeur des Cours Industriels municipaux de la ville de Metz.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

METZ.

IMPRIMERIE DE S. LAMORT, RUE DU PALAIS;
LITHOGRAPHIE DE DUPUIS-ÉTIENNE ET Ce, RUE DES CLERCS.

1844.

Digitized by Google

AVERTISSEMENT.

L'expérience nous a appris qu'un cours ne peut être suivi avec succès par des jeunes gens tels que les nôtres, qui débutent dans l'étude des sciences, s'ils n'ont un texte qui soit le résumé des leçons du professeur. Il nous a donc fallu mettre entre leurs mains un traité de Géométrie Industrielle. Aucun des ouvrages que nous connaissons sur ce sujet ne nous a paru approprié complètement à notre genre d'enseignement ni au temps qu'il nous est donné d'y consacrer. Les uns sont trop exclusivement pratiques et ne constituent, à proprement parler,

qu'un cours de dessin géométrique. D'autres sont trop exclusivement théoriques. Dans d'autres, recommandables d'ailleurs, de nombreuses applications sont mêlées aux propositions. Cette disposition nous a paru nuisible à l'enchaînement des idées et à l'ordre du programme. Nous avons compris qu'un cours de sciences industrielles, ouvert en faveur d'artistes et d'ouvriers, devait être fait de manière à profiter aux masses et non uniquement à la tête de la classe. A cet effet nous avons adopté la marche suivante :

Notre cours est divisé en huit chapitres ou livres, dont la composition est indiquée par la table des matières. Dans le premier livre, nous nous sommes attaché à faire distinguer, dans un énoncé, le but ou la conclusion, de l'hypothèse ou des données. Dans les livres suivants, nous supposons assez d'habitude à nos élèves pour leur laisser le soin d'établir cette distinction. Nous avons traité les problèmes par analyse pour initier nos jeunes gens à la manière de traiter eux-mêmes ceux qu'ils rencontreront fréquemment dans les professions qu'ils exercent ou qu'ils sont appelés à exercer. Chacun des livres se termine par un court chapitre d'applications choisies, propres à jeter de l'intérêt sur la théorie et les problèmes dont elles dépendent. Nos leçons sont toutes suivies d'exercices graphiques et numériques dont le lecteur trouvera les énoncés à la fin de chaque livre. Tous les élèves sont

tenus d'exécuter ce travail, capable d'inculquer, dans l'esprit des moins intelligents, les vérités fondamentales de la géométrie. Qu'il nous soit permis, à cette occasion, de rappeler ce que dit M. Lefebure de Fourcy, dans sa géométrie descriptive : « L'élève devra exécuter soigneu-
» sement avec de bons instruments les constructions de
» la plupart des problèmes. Sans parler des progrès que
» l'œil et la main feront dans l'art du dessin, je ferai
» observer que par cet exercice, l'attention se trouvant
» plus long-temps arrêtée sur l'application des principes,
» leur utilité devient plus évidente, l'esprit les conçoit
» plus nettement et la mémoire les retient sans effort. »
Le troisième livre est précédé d'une courte exposition des théories de la racine quarrée et des proportions, dont on fait un fréquent usage dans le reste de la géométrie. Le septième livre est aussi précédé de la théorie de la racine cubique, souvent utile dans les questions relatives aux volumes. Dans le huitième livre, nous avons laissé sans démonstration quelques propriétés des courbes, dans la crainte de trop nous étendre. Pour ne pas nuire à la rigueur de notre plan, nous les avons insérées dans les applications.

Les figures sont incorporées dans le texte pour éviter au lecteur une confrontation, toujours fatigante lorsqu'elles sont rejetées à la fin du livre.

Enfin, nous devons déclarer que, malgré quelques

innovations qui nous ont paru heureuses. Nous n'avons cédé, en nous décidant à l'impression, qu'à l'intérêt de nos élèves et au vœu de la Commission de surveillance de l'institution. Cette publication est spécialement affectée à l'usage de nos Cours Industriels, et par conséquent exempte de toute spéculation matérielle.

Digitized by Google

FAUTES ESSENTIELLES A CORRIGER.

Pages.	Lignes.	
9	5	*En remontant*, décrits de leurs sommets, *lisez :* décrits de chacun de leurs sommets.
20	»	*Ajoutez au théorème* 17 : Corollaire. *L'oblique* CK *est plus grande que la perpendiculaire* CD. Car on a : CDB ou son égal CDK > CKD.
37	4	OC, *lisez :* OD.
37	5	CDO, *lisez :* OCD.
38	10	de celle-ci, *lisez :* de ce théorème.
46	5	rationelle, *lisez :* rationnelle.
47	»	Fig. 3, AD, *lisez :* AB.
51	»	Fig. 1, AB, *lisez :* AC.
62	5	*en remontant*, ID, *lisez :* MD.
69	9	*en remontant*, dites, *lisez :* dits.
70	»	*Ajoutez au théorème* 39 : Les deux théorèmes précédents peuvent être compris sous un seul énoncé : *Si deux circonférences se coupent, la ligne des centres est plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence.*
79	»	Problème 9, *lisez :* Problème 10 ; *et corrigez les numéros d'ordre suivants.*
87	6	sera, *lisez :* est.
130	18	BRC, *lisez :* BAC.
130	21	DAC, D'A'C', *lisez :* ABC, A'B'C'.
153	1 et 2	*en remontant*, 0,6479, *lisez :* 0,618.
174	2	*en remontant*, BI double des HI, *lisez :* HI double de BI.
175	5	*en remontant*, $C = \frac{2R \times c}{\sqrt{4R^2 - C^2}}$, *lisez :* $C = \frac{2R \times c}{\sqrt{4R^2 - c^2}}$.
181	1	*en remontant*, $DZ = \frac{2R\sqrt{3}}{}$, *lisez :* $DZ = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.
185	13	*en remontant, ajoutez à la fin :* en exceptant celle qui partage le polygone en deux parties égales.

195 » *La figure a un côté de trop.*

206 1 et 2 *en remontant,* $\frac{6c\sqrt{3}}{4}$ ou $\frac{3c\sqrt{3}}{2}$, *lisez :* $\frac{6c^2\sqrt{3}}{4}$ ou $\frac{3c^2\sqrt{3}}{2}$, *et au lieu de* $\frac{c\sqrt{3}}{4}$, *lisez :* $\frac{c^2\sqrt{3}}{4}$.

225 13 paralellement, *lisez :* parallèlement.

229 9 *en remontant,* >, *lisez :* <.

234 3 *en remontant,* soient, *lisez :* fussent.

238 4 *en remontant,* Pp, *lisez :* P*p'*.

246 » Fig. 1. *Faites en lignes vues les prolongements des arêtes* SF, SA, SD, *au-dessus du sommet, et en lignes cachées les deux autres.*

251 11 *en remontant,* BGI, *lisez :* *b*GI.

252 4 *en remontant,* *a*AO, *lisez :* *a*AI.

255 19 et 20, Sac, S'a'c', *lisez :* sac, Sa'c'.

256 » *Mettez* o *aux pieds des hauteurs des deux petites pyramides dans la figure.*

257 » Livre cinquième, *lisez :* Livre sixième.

257 » *Ponctuez la diagonale* ac *de la figure.*

261 » *Ponctuez l'arête* A'B' *de la figure.*

263 » *Ponctuez la deuxième arête verticale de la première des deux figures du bas de la page.*

280 » *Ponctuez les côtés intérieurs des deux carrés de la fig.* 12.

310 15 AB'C, *lisez :* ABC.

329 » *Dans la première figure du compteur, marquez de la lettre* o *l'ouverture du compartiment* 1.

338 » *Dans la figure, au lieu de* N', *lisez :* N.

367 » *Dans la figure, les droites* RT, R'T *doivent être perpendiculaires aux rayons vecteurs.*

377 13 *en remontant, après* gauche, *ajoutez :* entre le foyer F et le milieu de ZF.

382 13 *Substituez* droite *aux mots :* par un plan perpendiculaire à celui du mur.

RÉSUMÉ

DES

LEÇONS DE GÉOMÉTRIE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

On appelle *corps* en Géométrie tout ce qui occupe une portion limitée de l'espace. Un corps a toujours trois dimensions : *longueur, largeur, hauteur* ou *épaisseur*.

Tout corps a donc des limites qui le séparent de l'espace indéfini. Ces limites portent le nom de *surfaces*. Elles n'ont que deux dimensions : *longueur* et *largeur*.

Les surfaces sont elles-mêmes limitées à leur rencontre ou *intersection* appelée *ligne*. Elle n'a qu'une dimension : *longueur*.

Enfin les lignes se terminent aussi à leur intersection qu'on nomme *point*. Il n'a pas de dimension*.

Les corps, les surfaces et les lignes portent la dénomination commune d'*étendues*. Les corps sont des étendues en longueur, largeur et hauteur ou épaisseur ; les surfaces, des étendues en longueur et largeur ; enfin les lignes, des étendues en longueur.

La Géométrie est une science qui a pour objet l'étude de la mesure et des propriétés de l'étendue.

* Du point en dessin géométrique.

Dans la nature, les trois dimensions sont toujours réunies pour former les corps, et de-là dérivent les idées de surfaces et de lignes. Il semblerait, d'après cela, qu'on devrait commencer l'étude de la Géométrie dans cet ordre; pour rendre notre marche plus facile, nous suivrons précisément un ordre inverse: ainsi nous commencerons par l'étude des lignes, puis nous passerons aux surfaces et enfin aux corps.

Il y a trois sortes de lignes : *la ligne droite* ou simplement *la droite, la ligne brisée* et la *ligne courbe.*

La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre. La droite qui joint deux points est donc la mesure naturelle de leur distance*.

La ligne brisée est un assemblage de lignes droites consécutives. Ces droites sont les *côtés* de la ligne brisée.

La ligne courbe peut être considérée comme une ligne brisée dont les côtés sont infiniment petits.

Le *plan* est une surface telle que si on y prend deux points à volonté, la droite qui les joint y soit toute entière. Il résulte de là que pour vérifier un plan, il faut examiner si l'arête d'une bonne règle s'applique exactement sur sa surface ou *coïncide* avec elle dans tous les sens.

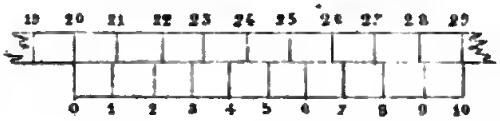
DE LA MESURE DES DROITES.

Mesurer une droite, c'est chercher son rapport avec l'unité de longueur adoptée ou le *mètre.*

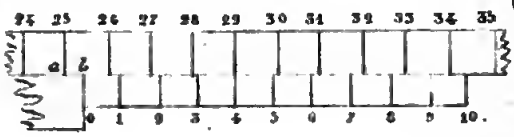
A cet effet, on porte le mètre sur la droite qu'on veut mesurer, autant de fois qu'il peut y être contenu ; le reste, s'il y en a un, s'évalue en décimètres; le nouveau reste, en centimètres, etc.

*Manière de dresser une règle. Sa vérification.

Pour pousser la mesure au degré d'approximation que nécessitent certaines opérations, il faut faire usage du *Vernier*.



Le *Vernier* a pour objet d'évaluer un reste de longueur plus petit que la plus petite subdivision de la règle dont on s'est servi pour mesurer. On conçoit, d'après cela, qu'il doit faire partie d'une règle dite *règle principale*. Supposons, pour fixer les idées, que les dernières divisions de celle-ci soient des millimètres, qu'une seconde règle, d'une grandeur de 9 millimètres et divisée en 10 parties égales, y soit adaptée avec la latitude de glisser sur toute sa longueur. C'est cette seconde règle qui porte le nom de Vernier. Puisque les 10 divisions du Vernier en valent 9 de la règle principale, une division du Vernier vaut les $\frac{9}{10}$ d'une division de la règle principale ou $\frac{9}{10}$ de millimètre. Donc si l'un des traits du Vernier coïncide avec un de ceux de la règle principale, le trait suivant du Vernier sera en retard, sur le correspondant de la règle, de $\frac{1}{10}$ de millimètre; le consécutif de deux rangs, sera en retard de 2 millimètres; le consécutif de trois rangs, sera en retard de 3 millimètres, etc., et cela soit qu'on lise de droite à gauche ou de gauche à droite. Maintenant, supposons que l'on ait une droite à mesurer; on l'applique contre la règle principale et on compte le nombre de divisions qu'elle contient, 25 par ex., avec un reste *ab*. On fait arriver alors le zéro du Vernier à l'extrémité du reste *ab*, et on examine quel est le trait du Vernier qui coïncide avec un de ceux de la règle; le numéro de ce trait donne le nombre de dixièmes de millimètre que contient le reste *ab*. Ici c'est le quatrième. Ainsi la droite à mesurer contient $25^{mi}\ \frac{4}{10}$ ou $25^{mi},4$. En effet, en lisant de droite à gauche, à partir des deux traits qui coïncident, on reconnaît que *ab* est précisément la distance de laquelle le



quatrième trait du Vernier est en retard sur celui du même ordre de la règle principale. Ce Vernier donne donc une approximation de $\frac{1}{10}$ d'une division de la règle.

Pour construire un Vernier qui donnât une approximation de $\frac{1}{20}$, il faudrait lui donner une longueur égale à 19 divisions de la règle principale et le diviser en 20 parties égales.

Toutefois on ne peut établir que théoriquement des Verniers destinés à donner une grande approximation ; car on reconnaît en pratique que si le nombre des divisions du Vernier est poussé trop loin, on ne distingue plus avec facilité les deux traits qui coïncident, attendu que plusieurs paraissent jouir de la même propriété.

Dans les recherches géométriques on adopte, pour unité de mesure de deux ou plusieurs droites, leur plus grande commune mesure, c'est-à-dire la plus grande droite qui puisse être contenue exactement dans chacune de celles-ci.

Cette recherche est basée sur la théorie du plus grand commun diviseur entre deux nombres en arithmétique. On porte donc la plus petite ligne sur la plus grande autant de fois qu'elle peut y être contenue ; s'il n'y a pas de reste, la plus petite ligne est la plus grande commune mesure. S'il y a un reste, on le porte sur la petite ligne, le nouveau reste sur le précédent, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un reste qui soit contenu exactement dans le précédent. Le dernier est la plus grande commune mesure. On évalue ensuite tous les restes au moyen du dernier, et on parvient à savoir combien de fois chacune des lignes données contient la commune mesure.

Application.

Chercher la commune mesure des deux droites AB et CD. En suivant la marche précédente on a trouvé :

$$\left.\begin{array}{l} AB = 2CD + BK \\ CD = 2BK + DE \\ BK = 3DE + BI \\ DE = 4BI \end{array}\right\} \text{BI est la commune mesure ;}$$

en remontant de la valeur de DE aux précédentes égalités, on trouve que BK = 13BI

CD = 30BI

AB = 73BI

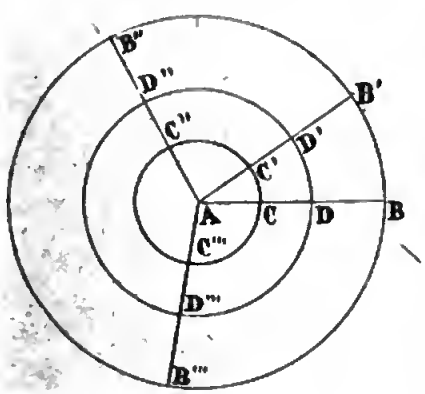
Donc le rapport de AB à CD est égal à celui de 73BI à 30BI ou de 73 à 30.

Si on ne trouve pas de reste contenu exactement dans le précédent, quelque loin qu'on pousse l'opération, les deux lignes sont dites *incommensurables*, c'est-à-dire, n'ont pas de commune mesure.

Pour trouver la plus grande commune mesure entre trois ou plus de trois droites, il faut chercher la plus grande commune mesure entre la première et la seconde, entre cette nouvelle commune mesure et la troisième droite, et ainsi de suite ; la dernière plus grande commune mesure obtenue sera la ligne cherchée. Le raisonnement qui conduit à cette marche est identique avec celui qu'on fait en arithmétique pour trouver le plus grand commun diviseur entre plusieurs nombres.

DE LA MESURE DES ANGLES.

Supposons que la droite AB′ se confonde primitivement avec AB ; si elle se meut autour du point A, elle prendra les diverses positions AB′, AB″, AB‴, etc., et lorsqu'elle reviendra à sa position primitive, elle aura décrit *un tour* ou *une révolution*, les points C, D, B auront décrit des courbes CC′C″C, DD′D″D, BB′B″B appelées *circonférences*. Si on considère une position intermédiaire AB′ de la droite mobile, la portion de révolution exprimée par l'ouverture BAB′ s'appellera

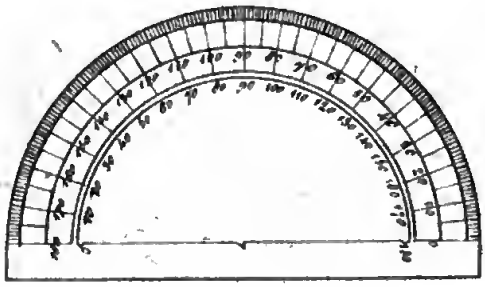


angle ; AB, AB′ en seront *les côtés*, A *le sommet* et les portions de circonférences qu'ont décrites les points C, D, B, savoir : CC′, DD′, BB′, porteront le nom d'*arcs*. Les distances des points C, D, B, au point fixe A ou *au centre* seront dits les *rayons* de la circonférence.

Il est évident que si la droite AB ne décrit qu'une demi-révolution, les divers points en question ne décriront qu'une demi-circonférence ; que le tiers d'une révolution correspondra au tiers d'une circonférence, et qu'en général une fraction de révolution correspondra à la même fraction de la circonférence. Il résulte de là que l'instrument capable de donner l'indication de l'arc donnerait aussi celle de l'angle. Cette correspondance des angles aux arcs est exprimée en Géométrie par l'énoncé suivant :

Tout angle au centre a pour indication ou pour mesure l'arc compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme centre avec un rayon arbitraire.

L'instrument destiné à mesurer les arcs en question se nomme *rapporteur*. Il est formé d'une plaque mince sur laquelle on a décrit une demi-circonférence. Pour apprécier les arcs, on l'a divisée en 180 parties égales appelées *degrés ;* chaque degré est divisé en deux parties égales appelées *demi-degrés*. La division ne va pas au-delà dans les rapporteurs ordinaires. Toutefois, dans certains instruments également destinés à mesurer les angles, et dont nous donnerons plus tard l'explication verbale, la division est poussée plus loin et fondée sur la subdivision, par la pensée, de chaque degré en 60 parties égales appelées *minutes*, de chaque minute en 60 parties égales appelées *secondes*. On

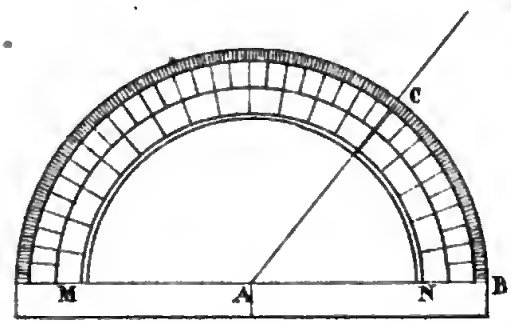


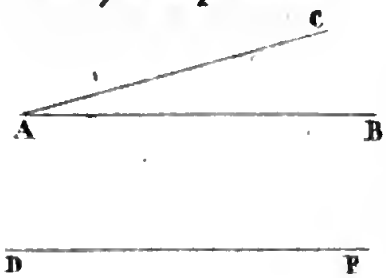
emploie la notation suivante (30° 20′ 10″) pour désigner 30 degrés 20 minutes 10 secondes.

Cet instrument est en cuivre ou en corne. Dans celui de cuivre, la partie comprise entre le diamètre et la bande graduée ou le *limbe* est évidée. Trois crans sont marqués sur le diamètre : deux aux extrémités et un au milieu. Celui du milieu est formé de deux droites dont l'une est d'équerre sur le diamètre. Son point de rencontre avec ce diamètre donne le centre du limbe.

Dans ceux en corne, la transparence de la substance a dispensé d'évider cet intervalle.

Mesurer un angle. — Pour s'en servir, on dispose le diamètre sur l'un des côtés de l'angle, de manière que le sommet coïncide avec le centre. C'est pour faciliter cette opération qu'on a fait les crans. Si ceux-ci n'existaient pas, la droite AB serait masquée par la règle MN ou *alidade*. Le second côté de l'angle passe par un point de division du limbe, qui donne l'indication de l'arc ou de l'angle. Mais comme certains angles peuvent avoir leur ouverture à gauche, on a établi pour ceux-ci une deuxième graduation qui a son zéro à gauche, et qui est tracée sur une circonférence *concentrique* (de même centre) à la première.





Faire un angle égal à un autre. — Il est facile, au moyen de cet instrument, de faire un angle égal à un autre et de sommet différent. Ex. Proposons-nous de faire en D, au-dessus de DF,

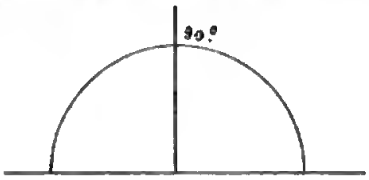
un angle égal à l'angle donné BAC. A cet effet, on mesure l'angle donné par le procédé précédent, puis on applique le diamètre du rapporteur sur la droite DF de manière que le centre passe en D, on lit ensuite sur le limbe le numéro résultant de la mesure précédente, on le marque d'un point qu'on joint au point D *.

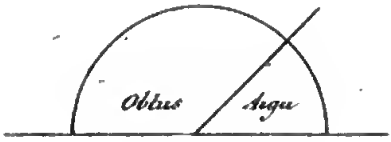
RÉSUMÉ.

Un angle est la portion de révolution qu'a censé décrite un des côtés autour d'un de ses points pour occuper la position du second côté.

Il se désigne généralement par trois lettres, en plaçant celle du sommet au milieu.

Il se mesure par l'indication d'un arc décrit entre ses côtés, de son sommet comme centre avec un rayon arbitraire.





Le rapporteur donne cette indication.

L'angle est *droit* s'il a pour mesure 90°; *aigu* s'il est plus petit; *obtus* s'il est plus grand.

Si deux droites forment un angle droit elles sont dites *perpendiculaires*.

De la nouvelle division de la circonférence. — Les anciens géomètres ont divisé, comme nous l'avons vu, la circonférence en 360 parties égales ou dégrés, le degré en 60 minutes, la minute en 60 secondes. Les nouveaux géomètres, voulant rendre les minutes et secondes fractions décimales du degré, ont adopté un autre mode de division.

La circonférence est divisée par eux en 400 parties égales ou degrés, chaque degré en 100 parties égales ou minutes, chaque minute en 100 parties égales appelées secondes. Ainsi 40° 20′ 75″ peuvent s'écrire 40°,2075.

* Autre procédé plus exact en pratique.

Toutefois nous avons conservé l'ancienne division parce que les instruments dont on fait usage aujourd'hui la comportent encore.

Il est facile d'ailleurs, de transformer en ancienne mesure un arc donné dans la nouvelle, et réciproquement.

Transformation d'un arc (ancien système) *en arc* (nouveau système) *et réciproquement.*

La circonférence (ancien système) vaut 360°
ou 21 600′
ou 1 296 000″.

La circonférence (nouveau système) vaut 400°
ou 40 000′
ou 4 000 000″.

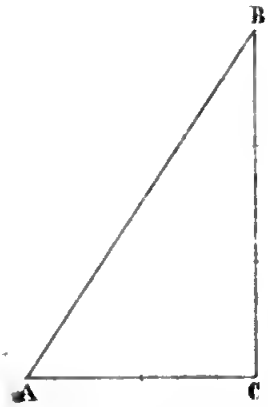
Donc l'ancien degré vaut les $\frac{400}{360} = \frac{10}{9}$ du nouveau,
l'ancienne minute les $\frac{40000}{21600} = \frac{50}{27}$ de la nouvelle,
l'ancienne seconde les $\frac{4000000}{1296000} = \frac{250}{81}$ de la nouvelle.

Réciproquement le nouveau degré vaut les $\frac{9}{10}$ de l'ancien,
la nouvelle minute les $\frac{27}{50}$ de l'ancienne,
la nouvelle seconde les $\frac{81}{250}$ de l'ancienne.

D'où il suit que pour convertir un arc ancienne mesure en arc nouvelle mesure, il faut le réduire en unités de la plus basse espèce et le multiplier par le 1er, le 2e, ou le 3e rapport du 1er tableau, et que réciproquement pour convertir un arc nouvelle mesure en arc ancienne mesure, il faut le réduire en unités de la plus basse espèce et le multiplier par le 1er, le 2e, ou le 3e rapport du 2e tableau, suivant que ces unités seront des degrés, minutes ou secondes.

Pour trouver la plus grande commune mesure entre deux angles commensurables, il faut chercher, comme pour les droites, la plus grande commune mesure entre leurs arcs décrits de leurs sommets comme centre avec le même rayon. L'angle correspondant à cet arc est l'angle cherché.

Autre mesure de l'inclinaison de deux droites. — Souvent on se donne l'inclinaison de deux droites, par le quotient numérique ou le rapport d'une perpendiculaire abaissée d'un



point quelconque de l'une sur l'autre, à la distance du pied de cette perpendiculaire au sommet de l'angle. Ex. Si BC vaut 3 et AC vaut 2, la pente ou l'inclinaison sera $\frac{3}{2}$*.

Toutefois il faut bien se garder de croire que ce rapport croisse proportionnellement à l'angle. C'est simplement une manière de lever un angle.

Figures égales.— Deux figures sont égales lorsqu'appliquées l'une sur l'autre, elles coïncident.

Axiome. — Un axiome est une propriété évidente.

Les principaux axiomes dont on fait usage en Géométrie sont :

1° Entre deux points on ne peut mener qu'une seule droite.

2° Le tout est plus grand que l'une de ses parties.

3° Deux quantités égales à une troisième sont égales.

Théorème. — Un théorème est l'énoncé d'une propriété à démontrer.

Dans tout théorème il faut distinguer deux parties : l'*hypothèse* et la *conclusion*. L'hypothèse est l'énoncé de ce qu'on accorde et la conclusion ou le but, c'est ce qu'il faut démontrer**.

Réciproque. — La réciproque d'un théorème est un autre théorème dans lequel on prend pour hypothèse la conclusion du précédent et pour conclusion l'hypothèse.

Corollaire. — Le corollaire exprime une propriété qui résulte immédiatement du théorème.

Scholie. — On nomme scholie une remarque résultant du mode de démonstration du théorème.

* Pentes des toitures en tuiles plates, creuses ou ardoises.

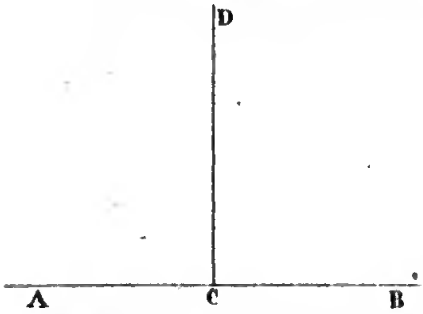
** Du tracé des lignes dans le dessin géométrique.

LIVRE PREMIER.

Nota. Dans ce livre et les trois suivants toutes les figures sont supposées faites dans un plan.

Théorème 1. — *Par un point pris sur une droite, on peut toujours élever une perpendiculaire et on ne peut en élever qu'une.*

Hyp.: On donne la droite AB et le point C.
But: On peut élever une seule perpendiculaire.

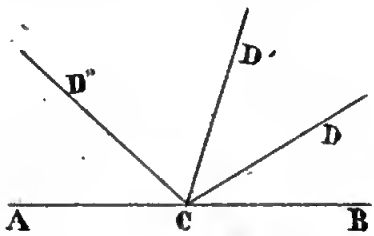


1° Car si du point C comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrit une demi-circonférence, qu'on joigne son milieu ou le n° 90 au point C, chacun des angles ACD, DCB aura pour mesure 90° et vaudra un droit.

2° Toute autre droite partant du point C fera nécessairement avec AB un angle plus petit ou plus grand que 90°*.

* Equerre. Sa vérification. Equerre d'arpenteur.

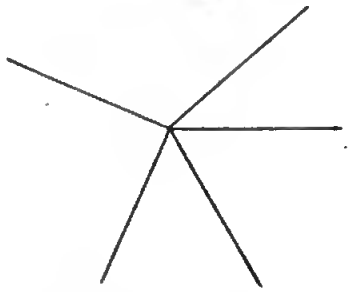
Théorème 2. — *Tant d'angles qu'on voudra ayant tous même sommet situé sur une droite, et leurs ouvertures dirigées d'un même côté de cette droite, ont pour mesure de leur somme 180° ou sont supplémentaires.*



Hyp.: On donne les angles DCB, D'CD, D''CD', ACD''.

But: On a: DCB + D'CD + D''CD' + ACD'' = 180°.

Car si du point C comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrit une demi-circonférence, la somme des arcs interceptés par les droites CB, CD, CD', etc., vaudra 180°.

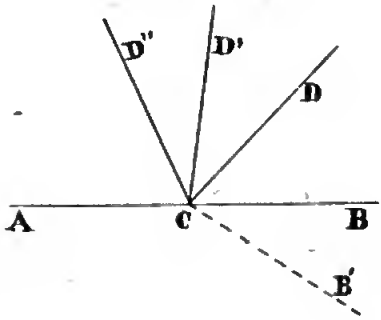


Corollaire. — La somme de tant d'angles qu'on voudra faits autour d'un point a pour mesure 360°.

Théorème 3. — *Réciproquement si tant d'angles qu'on voudra, formés autour d'un point et d'un même côté d'une droite, valent 180°, les côtés extérieurs sont en ligne droite.*

Hyp.: BCD + DCD' + D'CD'' + D''CA = 180°.

But: CB est le prolongement de AC.



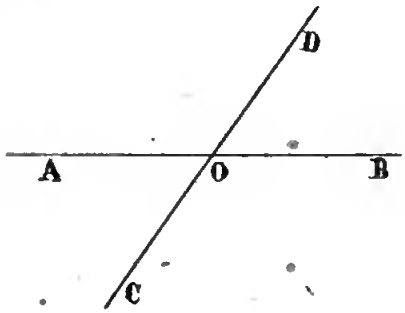
Car si CB n'est pas le prolongement de AC, soit CB' ce prolongement; alors, d'après la directe, on aura: ACD'' + D''CD' + D'CD + DCB' = 180°, d'ailleurs, par hypothèse, on a: ACD'' + D''CD' + D'CD + DCB = 180°. Ces deux sommes étant toutes deux égales à 180° sont égales, ce qui est en contradiction

avec l'inspection de la figure. Donc nous avons eu tort de supposer que CB n'était pas le prolongement de AC.

Théorème 4. — *Si deux droites se coupent, les angles opposés par le sommet sont égaux.*

Hyp.: AB et CD se coupent en O.

But: AOC = BOD, AOD = COB.



En effet AOC + COB = 180°, BOC + BOD = 180°, les deux seconds membres de ces deux égalités sont égaux, les premiers le sont donc, c'est-à-dire, AOC + COB = BOC + BOD, supprimant dans les deux membres le même angle COB, les restes sont égaux ou AOC = BOD.

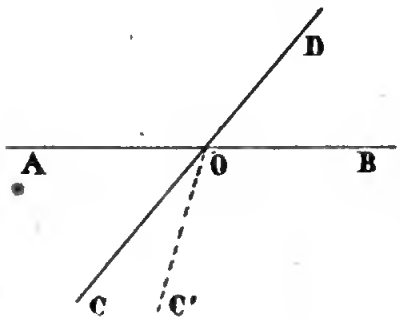
On démontrerait de même que AOD = COB.

Théorème 5. — *Réciproquement si quatre angles formés autour d'un même point sont tels que les non-adjacents soient égaux, deux des côtés sont les prolongements des deux autres.*

Nota. Deux angles qui ont même sommet, un côté commun et leurs ouvertures à droite et à gauche de ce côté sont dits adjacents. AOD, DOB sont adjacents; AOD, COB sont non-adjacents.

Hyp.: AOD = COB, DOB = AOC.

But: OC est le prolongement de OD et OB celui de OA.

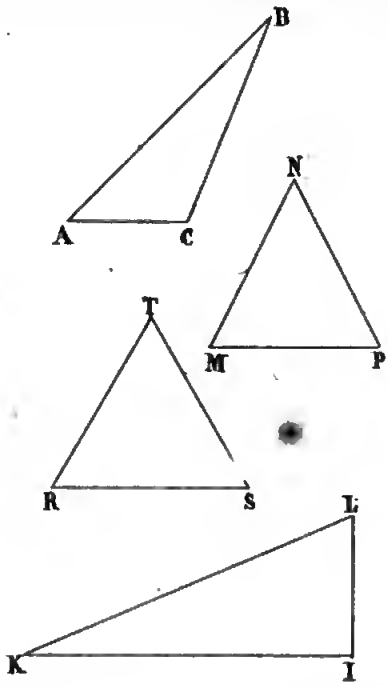


Car si OC n'est pas le prolongement de OD, soit OC' ce prolongement; alors on aura: AOD + AOC' = 180°; mais la somme des quatre angles donnés vaut 360°, et comme les non-adjacents sont égaux, deux adjacents valent moitié de la somme 360°. Donc COA + AOD = 180°.

Cette égalité et la précédente ont les seconds membres égaux, les premiers le sont donc et on aura AOD + AOC' = COA + AOD. Supprimant de part et d'autre AOD, il vient : AOC' = COA, ce qui est impossible. Donc CO est le prolongement de OD. On démontrerait de même que OB est le prolongement de OA.

TRIANGLES.

Lorsque trois droites se coupent deux à deux, la figure qui en résulte s'appelle : triangle. *Il y a six éléments dans un triangle, les trois côtés et les trois angles.*



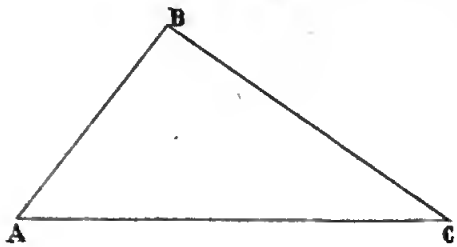
Il y a quatre sortes de triangles : le *triangle scalène* qui a ses trois côtés inégaux. AB > BC > AC.

Le *triangle isocèle* qui a deux côtés égaux. MN = NP.

Le *triangle équilatéral* qui a ses trois côtés égaux. RT = TS = RS.

Le *triangle rectangle* qui a un angle droit LIK = 90°. Le côté opposé à l'angle droit s'appelle *hypothénuse.*

Théorème 6. — *Dans tout triangle, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres, et plus grand que leur différence.*



Hyp. : On donne le triangle ABC.

But : AC < AB + BC, AC > BC — AB.

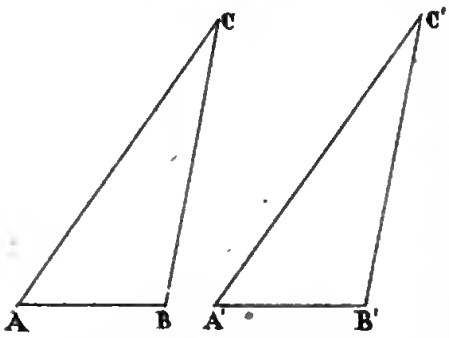
La droite AC étant le plus

court chemin de A en C on a évidemment : AC<AB+BC. On aura, par la même raison, BC<AC+AB. Si, dans cette inégalité, on retranche de part et d'autre AB, elle subsistera dans le même sens et on aura : BC—AB<AC ou AC>BC—AB.

Théorème 7. — *Deux triangles sont égaux quand ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.*

Hyp.: ACB = A'C'B', AC = A'C', CB = C'B'.

But: Les deux triangles sont égaux.



Appliquons A'C' sur son égal AC : puisque l'angle A'C'B' est égal à l'angle ACB, C'B' prendra la direction de CB, et comme par hypothèse CB=C'B' le point B' coïncidera avec le point B. D'ailleurs le point A' coïncide déjà avec le point A, donc A'B' se confondra avec AB.

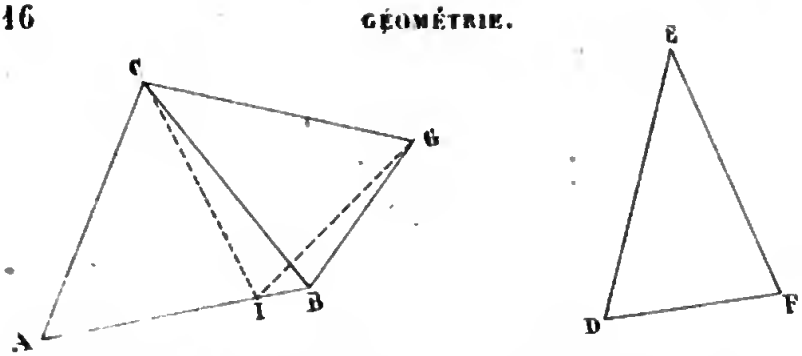
Scholie. — On déduit de là que l'angle CAB, opposé à CB, est égal à l'angle C'A'B', opposé à C'B', et que l'angle CBA, opposé à AC, est égal à C'B'A', opposé à A'C'. Donc dans les triangles égaux, aux côtés égaux sont opposés des angles égaux.

Théorème 8. — *Si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, et que l'angle compris entre les deux côtés du premier soit plus grand que l'angle compris entre les deux côtés du second, le troisième côté du premier sera plus grand que le troisième côté du second.*

Hyp.: AC = DE, CB = EF, ACB > DEF.

But: AB > DF.

Transportons le triangle DEF à côté du triangle ABC, de manière que EF s'applique sur son égal CB. Soit CBG sa nouvelle position. Divisons l'angle ACG en deux parties égales par la droite CI qu'on nomme *bissectrice*. Joignons I et G.

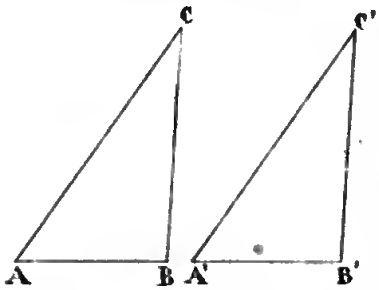


Les deux triangles résultant ACI et CIG sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, savoir : l'angle ACI = ICG, le côté CI commun, et CG = AC puisque CG = ED ; donc AI = IG. Le triangle IBG nous donne : BG < IB + IG ou bien BG < IB + AI ou BG < AB. Or BG = DF. Donc DF < AB.

Théorème 9. — *Réciproquement si deux triangles ont les trois côtés égaux, ils sont égaux.*

Hyp.: AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C'.

But: Les deux triangles sont égaux.



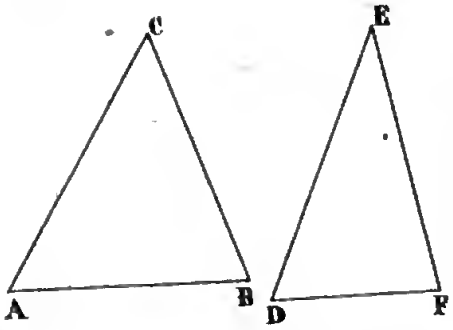
Il suffit de démontrer que l'angle C est égal à l'angle C', car alors on retombera sur le théorème 7. Si C était plus grand ou plus petit que C', le côté opposé AB serait plus grand ou plus petit que A'B', ce qui est contre l'hypothèse. Donc, etc.

Théorème 10. — *Réciproquement si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, et que le troisième côté du premier soit plus grand que le troisième côté du second, l'angle opposé du premier sera plus grand que l'angle correspondant du second.*

Hyp.: AC = DE, BC = EF, AB > DF.

But: L'angle ACB > DEF.

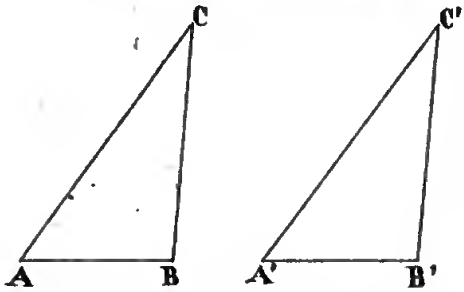
Car si l'angle ACB n'était pas plus grand que DEF, il serait



plus petit ou égal ; dans le premier cas AB serait nécessairement plus petit que DF d'après le théorème 8, ce qui est contre l'hypothèse; dans le second cas AB serait égal à DF d'après le théorème 7, ce qui est également contre l'hypothèse.

THÉORÈME 11. — *Deux triangles sont égaux quand ils ont un coté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.*

Hyp.: AB = A'B', A = A', B = B'.
But: Les deux triangles sont égaux.



Appliquons A'B' sur son égal AB ; à cause de l'angle A' égal à l'angle A, le côté A'C' prendra la direction de AC. A cause de l'angle B' égal à l'angle B, le côté B'C' prendra la direction de BC; le point C' devra donc se trouver à la fois sur AC et BC, donc il se trouvera à leur intersection C. Donc les deux triangles coïncideront.

RÉSUMÉ DES CARACTÈRES D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES.

1° Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.

2° Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.

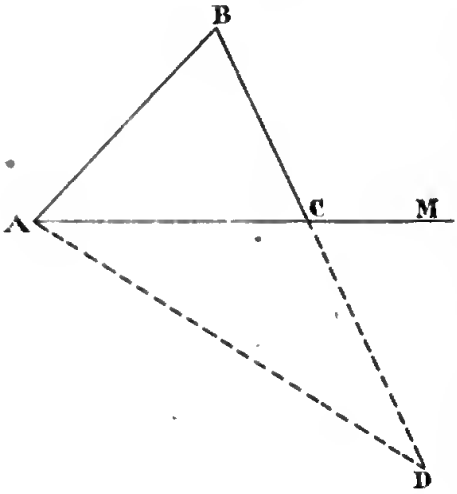
3° Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.

Il y a un quatrième caractère d'égalité que nous verrons plus tard, mais qui est soumis à une restriction.

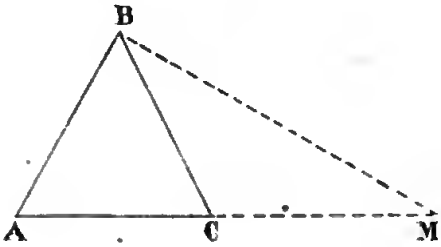
Théorème 12. — *L'angle extérieur d'un triangle est plus grand que chacun des intérieurs non-adjacents.*

Nota. On appelle angle extérieur d'un triangle celui qui est formé d'un côté et du prolongement de son adjacent.

Hyp.: BCM est extérieur au triangle ABC.
But: 1° BCM > BAC, 2° BCM > ABC.



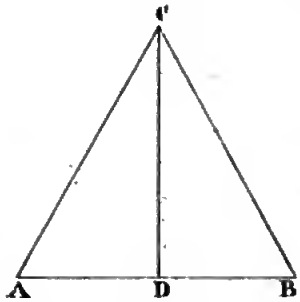
1° Prolongeons BC d'une longueur CD égale à AB. Joignons AD. Le triangle ABD nous donne : BC + CD < AB + AD. Or CD = AB. Donc en les retranchant dans l'inégalité précédente, elle subsistera encore dans le même sens et on aura : BC < AD. Or les deux triangles BAC et CAD ont deux côtés égaux chacun à chacun, et le troisième côté de l'un AD est plus grand que le troisième côté de l'autre BC; donc l'angle opposé ACD du premier est plus grand que l'angle opposé BAC du second : or l'angle ACD = BCM, donc BCM > BAC.



2° BCM > ABC. Prenons CM = AB et joignons BM, le triangle ABM donne AC + CM < AB + BM. Or comme CM = AB on aura : AC < BM, on en conclura comme précédemment : ABC < BCM. Ce qu'il fallait démontrer.

Théorème 13. — *Dans un triangle isocèle, aux côtés égaux sont opposés des angles égaux.*

Hyp.: AC = BC.
But: A = B.



Joignons le sommet C et le milieu du côté opposé. Les deux triangles ADC, CDB sont égaux comme ayant les trois côtés égaux, savoir : AC=CB par hypothèse, CD commun, et AD=DB par construction ; donc l'angle A, opposé à CB, est égal à l'angle B, opposé à AC.

Scholie. — On appelle *base* d'un triangle isocèle celui des trois côtés qui n'est égal à aucun des deux autres. De l'égalité des triangles ADC et CDB, on déduit l'égalité des angles ADC et CDB, et comme ils valent en somme 180°, chacun d'eux est droit. On conclut aussi l'égalité des deux angles en C. Donc :

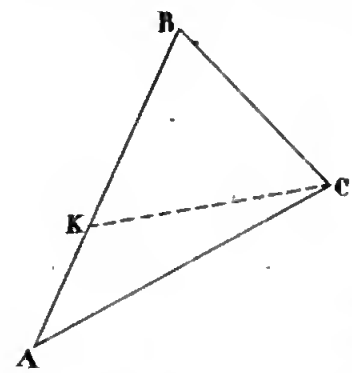
1° La droite qui joint le sommet au milieu de la base d'un triangle isocèle est perpendiculaire au milieu de cette base.

2° Elle est bissectrice de l'angle au sommet.

Cette droite se nomme l'*apothème* du triangle.

Corollaire. — Dans un triangle équilatéral les trois angles sont égaux.

Théorème 14. — *De deux côtés inégaux d'un triangle, au plus grand est opposé le plus grand angle.*



Hyp.: AB > BC.

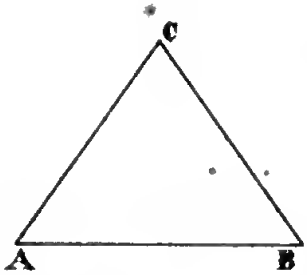
But: C > A.

Car si nous prenons BK=BC et que nous joignions KC, le triangle BKC sera isocèle, par conséquent BKC=BCK. Or l'angle BKC extérieur au triangle AKC, est plus grand que l'angle A, donc son égal BCK est plus grand que l'angle A, et à plus forte raison BCA > A.

Théorème 15. — *Réciproquement si un triangle a deux angles égaux, il est isocèle.*

Hyp.: A = B.

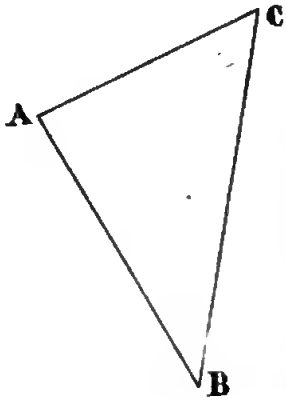
But: AC = CB.



Car si AC n'était pas égal à CB, l'un serait plus grand que l'autre, et, d'après le théorème précédent, l'un des deux angles opposés serait plus grand que l'autre, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Corollaire. — Si un triangle a ses trois angles égaux, il est équilatéral.

Théorème 16. — *Réciproquement de deux côtés d'un triangle, celui-là est le plus grand qui est opposé au plus grand angle.*



Hyp.: A > B.
But: BC > AC.

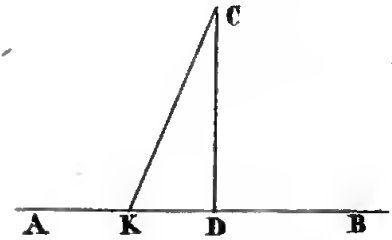
Car si cela n'avait pas lieu, BC serait égal à AC ou plus petit que AC. Dans le premier cas, l'angle A serait égal à B, ce qui est contre l'hypothèse; dans le second cas, l'angle A serait plus petit que l'angle B, ce qui est également contre l'hypothèse.

DE LA PERPENDICULAIRE ET DES OBLIQUES.

Théorème 17. — *D'un point pris hors d'une droite, on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire sur cette droite.*

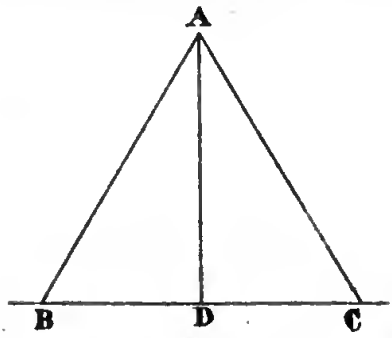
Hyp.: On donne la droite AB et le point C.

But: On ne peut abaisser qu'une perpendiculaire sur AB.



Car supposons que CD en soit une. Toute autre droite CK ne le sera pas, ou en d'autres termes sera *oblique*. Car l'angle CDB, extérieur au triangle CKD, est plus grand que l'angle CKD; donc ce dernier angle n'est pas droit.

Théorème 18. — *Deux obliques dont les pieds sont équidistants de celui de la perpendiculaire sont égales.*



Hyp.: AD perp. sur BC, BD = DC.

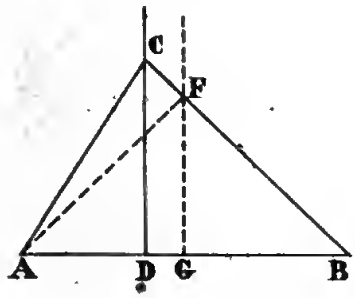
But: AB = AC.

Car les deux triangles ADB et ADC ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, savoir : les deux angles en D droits, AD commun, et BD=DC par hypothèse. Donc AB = AC.

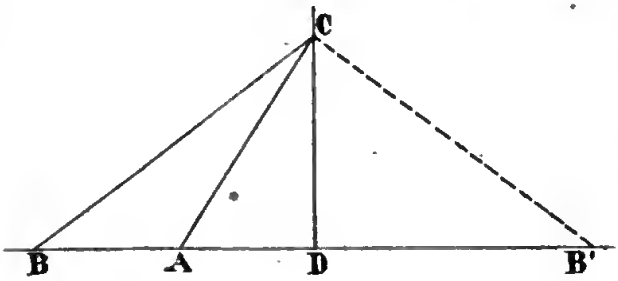
Théorème 19. — *De deux obliques dont les pieds sont inégalement distants de celui de la perpendiculaire, celle dont le pied s'écarte le plus est la plus grande.*

Hyp.: CD perp. à AB, DB > AD.

But: CB > AC.



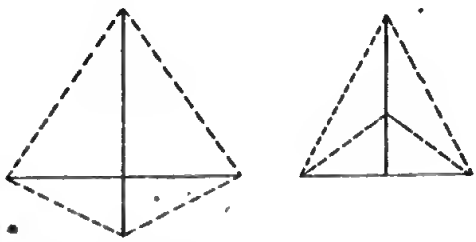
Nous examinerons d'abord le cas où les deux obliques sont situées de chaque côté de la perpendiculaire. Du milieu G de la distance AB élevons la perpendiculaire GF, joignons son point de rencontre F au point A ; alors, d'après le théorème précédent, FB = FA comme obliques s'écartant également du pied G de la perpendiculaire GF. Le triangle CFA nous donne : CA < CF + FA, au lieu de FA mettons FB et nous aurons : CA < CF + FB ou CA < CB. Ce qu'il fallait démontrer.



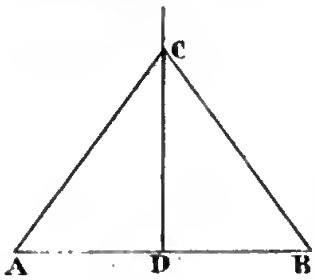
Si les deux obliques sont situées du même côté de la perpendiculaire, on prend DB' égale à

DB, on joint CB'; alors, de ce que CB' soit plus grande que CA, son égale CB sera aussi plus grande que CA.

Scholie. — Il résulte du théorème 18, que tout point pris sur la perpendiculaire au milieu d'une droite est équidistant des deux extrémités de celle-ci. Il résulte aussi de la construction précédente, que tout point C, pris hors de la perpendiculaire GF au milieu d'une droite, est plus près d'une extrémité A que de l'autre B. On dit alors que toute perpendiculaire au milieu d'une droite et *le lieu géométrique* de tout point équidistant des extrémités de cette droite, et comme deux points suffisent pour déterminer une droite, nous conclurons que : *toute droite qui a deux de ses points respectivement à égales distances des extrémités de cette droite, sera perpendiculaire en son milieu.*



Théorème 20. — *Réciproquement si deux obliques sont égales, leurs pieds sont équidistants de celui de la perpendiculaire.*



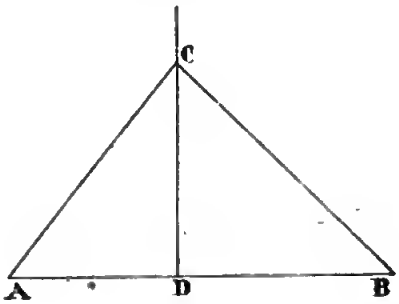
Hyp. : AC = CB.
But : AD = DB.

Car si leurs pieds n'étaient pas équidistants de celui de la perpendiculaire, l'un serait plus distant que l'autre, et, d'après le théorème précédent, l'oblique correspondante serait plus grande que l'autre, ce qui est contre l'hypothèse, puisqu'on les donne égales.

Corollaire. — D'un point à une droite on ne peut mener plus de deux droites égales.

Théorème 21. — *Réciproquement de deux obliques*

inégales, la plus grande est celle dont le pied est le plus distant de celui de la perpendiculaire.



Hyp.: CB > AC.
But: DB > AD.

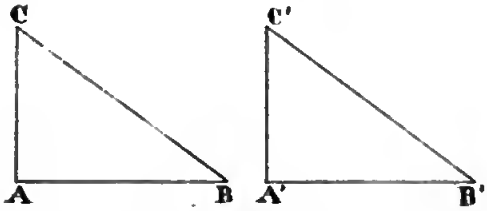
Car si DB n'était pas plus grand que AD on aurait DB=AD ou DB < AD. Dans le premier cas, AC serait égale à CB, et dans le second, CB serait plus petite que AC, ce qui est contre l'hypothèse.

CARACTÈRES D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES RECTANGLES.

THÉORÈME 22. — *Deux triangles rectangles sont égaux quand ils ont l'hypothénuse égale et un côté égal.*

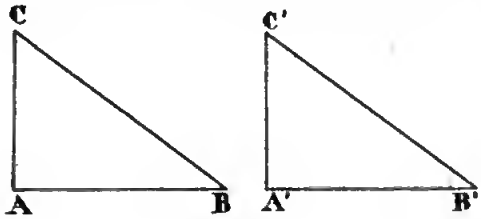
Hyp.: A = 90°, A' = 90°, CB = C'B', AC = A'C'.

But: Les deux triangles sont égaux.



Appliquons le côté AC sur son égal A'C'; à cause de l'angle A droit aussi bien que A', le côté AB prendra la direction de A'B'; et comme CB = C'B', et qu'on peut les considérer comme deux obliques égales qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire, le point B tombera sur le point B'.

THÉORÈME 23. — *Deux triangles rectangles sont égaux quand ils ont l'hypothénuse égale et un angle aigu égal.*



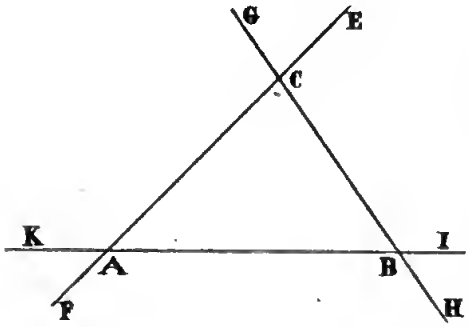
Hyp.: BC = BC', B=B', A=90°, A'=90°.

But: Les deux triangles sont égaux.

Plaçons l'hypothénuse CB sur son égale C'B'.

A cause de l'angle B égal à B', le côté BA prendra la direction de B'A', et la perpendiculaire CA à AB prendra aussi la direction de C'A' perpendiculaire à A'B'; par suite, le point A qui doit se trouver à la fois sur B'A' et sur C'A' se trouvera à leur rencontre A'.

THÉORIE DES PARALLÈLES.



Lorsque trois droites se coupent deux à deux, l'une quelconque coupe les deux autres, on la nomme *sécante* ou *transversale* par rapport à celles-ci.

De cette combinaison de droites résultent : des *angles correspondants*, des *angles alternes-internes*, *alternes-externes*, *intérieurs* et *extérieurs*.

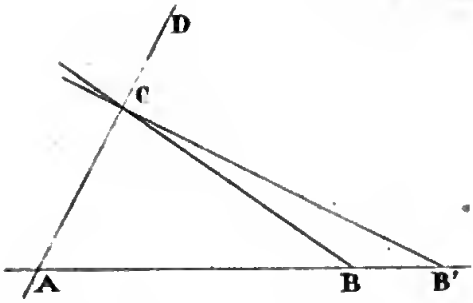
1° On appelle angles correspondants ceux qui sont situés d'un même côté de la sécante, l'un en dedans des deux autres droites, l'autre en dehors et non-adjacents. Il y a quatre couples d'angles correspondants par rapport à la sécante GH. ECB et IBH, ECG et IBC, GCA et CBA, ACB et ABH.

2° On appelle angles alternes-internes ceux qui sont en dedans des deux droites, de chaque côté de la sécante et non-adjacents. Il y en a deux couples : ACB et CBI, ECB et CBA.

3° On appelle angles alternes-externes ceux qui sont hors des deux droites, de chaque côté de la sécante et non-adjacents. Il y en a deux couples : GCE et ABH, GCA et IBH.

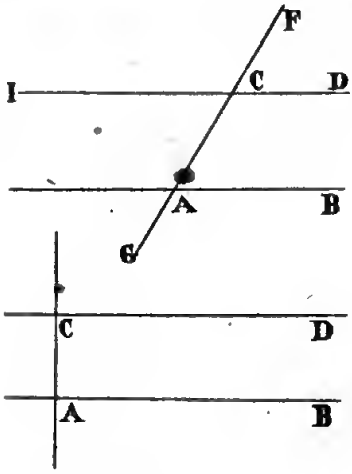
4° On appelle angles intérieurs ceux qui sont d'un même côté de la sécante, en dedans des deux autres droites. Il y en a deux couples : ACB et CBA, ECB et CBI.

5° On appelle angles extérieurs ceux qui sont d'un même côté de la sécante, en dehors des deux droites. Il y en a deux couples : GCE et IBH, GCA et ABH.



Si, les deux droites AC, AB restant fixes, la droite BC se meut autour du point C et que le point B s'éloigne de plus en plus dans la direction AB, l'angle extérieur DCB diminuera et finira par devenir égal à l'angle intérieur CAB. A cette époque, BC sera *parallèle* à AB, c'est-à-dire, ne la rencontrera pas quelque loin qu'on les prolonge. Car si cela avait lieu, l'angle extérieur DCB serait plus grand que l'angle intérieur CAB, ce qui est contre l'hypothèse.

Théorème 24. — *Si deux droites, coupées par une troisième, forment des angles correspondants égaux, elles sont parallèles.*



Hyp.: FCD = CAB.
But: CD ne rencontre pas AB.

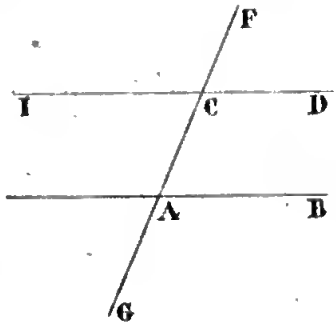
Cette proposition est une conséquence du raisonnement précédent.

Corollaire. — Deux perpendiculaires AB, CD à une droite AC, sont parallèles. Car les angles correspondants sont égaux *.

Théorème 25. — *Si deux droites, coupées par une troisième, forment des angles alternes-internes égaux, elles sont parallèles.*

Hyp.: L'angle ICA = CAB.
But: Les deux droites sont parallèles.

* Par un point donné, mener une parallèle à une droite.



En effet, l'angle ICA est égal à FCD comme opposé par le sommet ; donc l'angle FCD= CAB, et le cas est ramené au précédent.

Théorème 26. — *Si les angles alternes-externes sont égaux, les droites sont parallèles.*

Hyp. : ICF = GAB.
But : AB est parallèle à CD.

Démonstration analogue.

Théorème 27. — *Si la somme des angles intérieurs est égale à 180° les droites sont parallèles.*

Hyp. : DCA + CAB = 180°.
But : AB parallèle à CD.

DCA est par hypothèse supplémentaire de CAB, il l'est de FCD d'après l'inspection de la fig. Donc FCD = CAB. Ces deux angles sont correspondants. Donc etc.

Théorème 28. — *Si la somme des angles extérieurs est égale à 180°, les droites sont parallèles.*

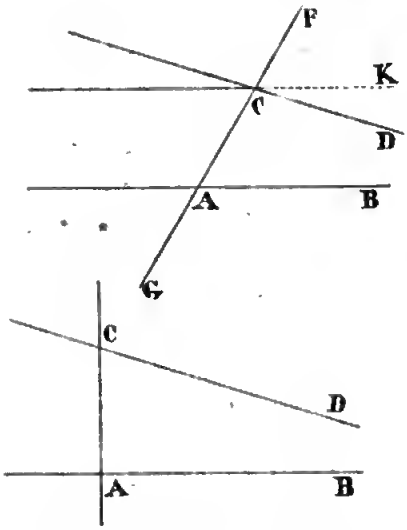
Démonstration analogue.

Postulatum. — *Par un point pris hors d'une droite, on ne peut mener qu'une parallèle à cette droite.*

On appelle *postulatum*, en géométrie, l'énoncé d'une propriété qu'on ne démontre pas et sur laquelle on s'appuie.

Théorème 29. — *Si les angles correspondants sont inégaux les droites se rencontrent.*

Hyp. : FCD > CAB.
But : CD rencontre AB.



Car si cela n'avait pas lieu, CD serait parallèle à AB. Faisons en C avec FC un angle FCK égal à CAB, alors CK sera parallèle à AB, d'après le théorème 24. Donc du point C on pourrait mener deux parallèles à AB, ce qui est impossible.

Corollaire. — Si de deux droites, l'une est perpendiculaire et l'autre oblique à une troisième, elles se rencontreront.

Théorème 30. — *Si les angles alternes-internes sont inégaux les droites se rencontrent.*

Démonstration analogue.

Théorème 31. — *Si les angles alternes-externes sont inégaux les droites se rencontrent.*

Démonstration analogue.

Théorème 32. — *Si la somme des angles intérieurs est plus petite ou plus grande que 180° les droites se rencontrent.*

Hyp. : DCA + CAB $<$ 180°.

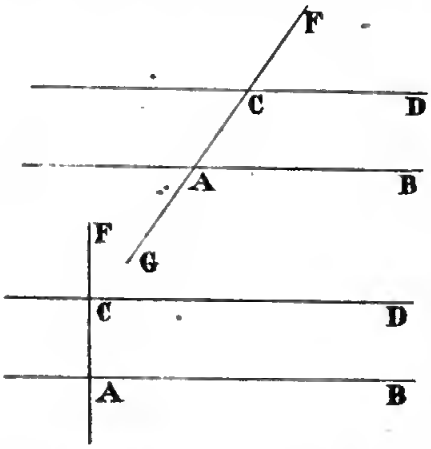
But : Les droites se rencontrent.

Car si cela n'avait pas lieu, elles seraient parallèles. Faisons alors en C avec FC, un angle KCA supplémentaire de CAB; d'après le théorème 27, CK sera parallèle à AB. Donc du point C on pourrait mener deux parallèles à AB.

Théorème 33. — *Si la somme des angles extérieurs est plus petite ou plus grande que 180°, les droites se rencontrent.*

Démonstration analogue.

Théorème 34. — Réciproques. — *Si deux droites sont parallèles, les angles correspondants sont égaux.*



Hyp. : AB parallèle à CD.
But : FCD = CAB.

Car si cela n'avait pas lieu, CD rencontrerait AB en vertu du théorème 29.

Corollaire. — Une perpendiculaire à une droite l'est à sa parallèle. Car si AF est perpendiculaire à AB l'angle CAB est droit, son correspondant FCD le sera donc aussi.

Théorème 35. — *Si deux droites sont parallèles, les angles alternes-internes sont égaux.*

Démonstration analogue.

Théorème 36. — *Si deux droites sont parallèles, les angles alternes-externes sont égaux.*

Démonstration analogue.

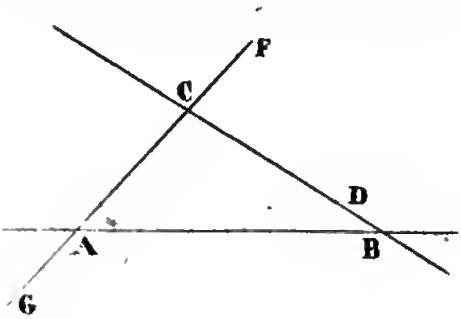
Théorème 37. — *Si deux droites sont parallèles, les angles intérieurs sont supplémentaires ou valent* 180°.

Démonstration analogue.

Théorème 38. — *Si deux droites sont parallèles, les angles extérieurs sont supplémentaires.*

Démonstration analogue.

Théorème 39. — Réciproques. — *Si deux droites ne sont pas parallèles, les angles correspondants sont inégaux.*



Hyp. : CD rencontre AB.
But : FCD > CAB.

Car si les angles correspondants étaient égaux les lignes seraient parallèles en vertu du théorème 24.

Théorème 40. — *Si les deux droites se rencontrent, les angles alternes-internes sont inégaux.*

Démonstration analogue.

Théorème 41. — *Si les deux droites se rencontrent, les angles alternes-externes sont inégaux.*

Démonstration analogue.

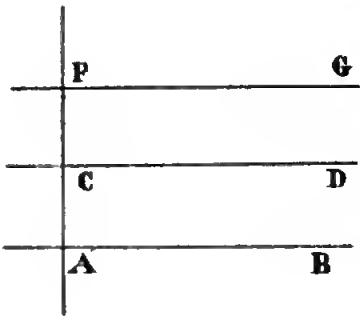
Théorème 42. — *Si les deux droites se coupent, les angles intérieurs ne sont pas supplémentaires.*

Démonstration analogue.

Théorème 43. — *Si les deux droites se coupent, les angles extérieurs ne sont pas supplémentaires.*

Démonstration analogue.

Théorème 44. — *Deux droites respectivement parallèles à une troisième, sont parallèles entre elles.*

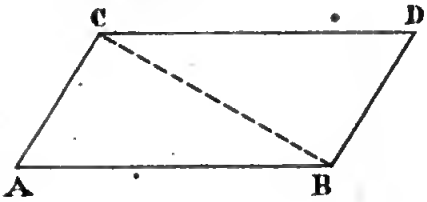


Hyp.: AB parallèle à FG
CD id. FG.

But: AB parallèle à CD.

Abaissons d'un point quelconque une perpendiculaire sur AB, elle le sera à FG, et par conséquent à CD, qui est parallèle à FG. En résumé, les deux droites AB et CD sont perpendiculaires à une même droite, donc elles sont parallèles.

Théorème 45. — *Les parallèles comprises entre parallèles sont égales.*



Hyp.: AB parallèle à CD
AC id. DB.

But: AB = CD
AC = BD.

Joignons les points C et B. Les deux triangles ABC, CBD

sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux, savoir : BC commun, ABC = BCD et ACB = CBD comme alternes-internes. Donc AB = CD et AC = BD.

Corollaire. — Deux parallèles sont partout équidistantes. Nous avons vu que deux parallèles avaient leur perpendiculaire commune AC, et comme cette perpendiculaire exprime la plus courte distance des deux parallèles, on l'adopte pour mesure de celle-ci.

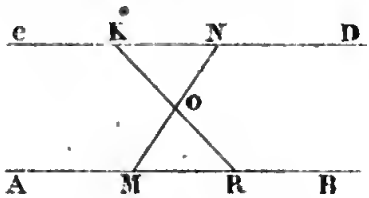
Les deux perpendiculaires AC et BD sont égales comme parallèles comprises entre parallèles.

Cette propriété s'énonce aussi de la manière suivante : La parallèle à une droite est le lieu géométrique de tout point équidistant de cette droite*.

Théorème 46. — *Si, par le milieu d'une sécante limitée à deux parallèles, on mène une droite quelconque limitée aux mêmes parallèles, les deux segments de celle-ci sont égaux.*

Hyp.: AB parallèle à CD, OK = OR.

But: OM = ON.



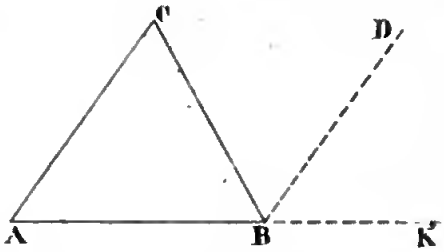
Les deux triangles OKN et OMR sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux, savoir : OK = OR, KON = MOR comme opposés par le sommet ; OMR = ONK comme alternes-internes. Donc OM = ON.

Théorème 47. — *La somme des trois angles d'un triangle est égale à 180° ou à deux droits.*

Hyp.: On donne le triangle ABC.

But: A + B + C = 180°.

* Du trusquin. — Du lever des courbes. — Des traînées.



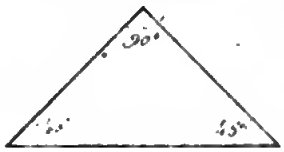
Prolongeons AB et menons par le point B une parallèle à AC. La somme des trois angles en B vaut 180°. Or, l'angle CBA est commun au triangle et au groupe des trois angles en B; l'angle CBD est égal à ACB comme alterne-interne; l'angle DBK est égal à CAB comme correspondant; donc aussi la somme des trois angles du triangle vaut 180°.

Scholie. — L'angle CBK, extérieur au triangle, est égal à la somme des deux intérieurs opposés A + C.

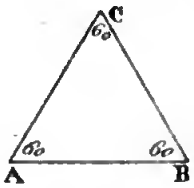
Corollaire 1. — Si deux angles sont connus, le troisième s'en déduira.

Corollaire 2. — Si le triangle est rectangle, la somme des angles aigus vaut 90°. Ils sont dits *complémentaires*.

Corollaire 3. — Si le triangle est isocèle et que l'un des angles soit connu, les deux autres s'en déduiront.

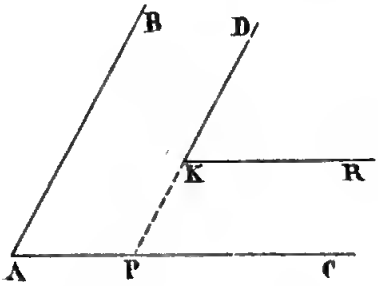


Corollaire 4. — Si le triangle est rectangle et isocèle, chaque angle aigu vaut 45° ou $\frac{1}{2}$ droit.



Corollaire 5. — Si le triangle est équilatéral, chaque angle vaut 60° ou $\frac{2}{3}$ de droit.

Théorème 48. — *Les angles qui ont les côtés parallèles et dirigés dans le même sens ou en sens inverse sont égaux.*



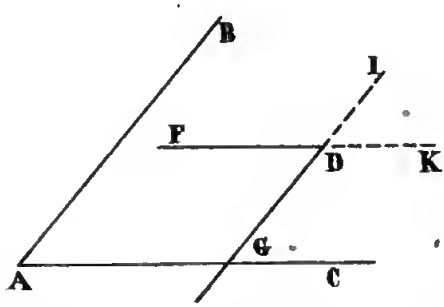
1° *Hyp.:* AB paral. à KD et de même sens.

AC parallèle à KR et de même sens.

But: BAC = DKR.

Prolongeons DK jusqu'à sa rencontre avec AC en P,

DKR = KPC comme correspondants : KPC = BAC par la même raison. Donc DKR = BAC.



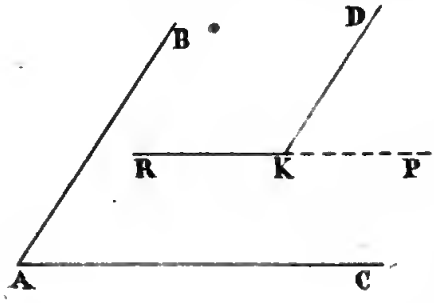
2° *Hyp.:* AC paral. à FD et de sens inverse.

AB parallèle à DG et de sens inverse.

But : A = FDG.

Prolongeons FD et DG, alors les côtés de l'angle IDK seront encore parallèles à ceux de l'angle A et de même sens, donc IDK = BAC ; mais IDK = FDG comme opposés au sommet. Donc FDG = BAC.

Théorème 49. — *Les angles qui ont leurs côtés parallèles, les uns dirigés dans le même sens et les autres en sens inverse, sont supplémentaires.*



Hyp.: AB paral. à DK et de même sens.

RK parallèle à AC et de sens inverse.

But: A + DKR = 180°.

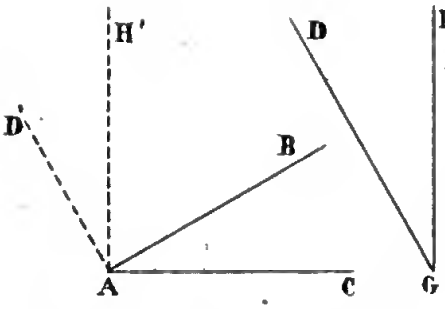
Prolongeons RK, alors l'angle DKP sera égal à BAC comme ayant les côtés parallèles et de même sens. Mais DKP est supplémentaire de DKR ; BAC sera donc aussi supplémentaire de DKR.

Théorème 50. — *Deux angles qui ont leurs côtés perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires.*

1° *Hyp. :* HG perpendiculaire à AC.
DG id, AB.

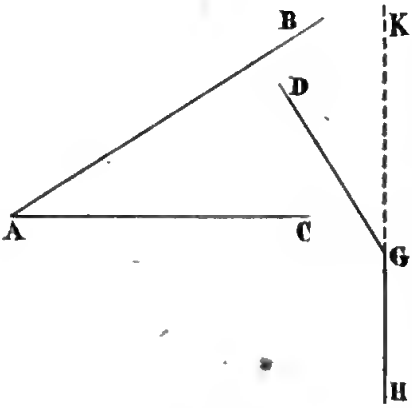
But : BAC = DGH.

Menons par le sommet A des parallèles à HG et à DG de même sens. HG étant perpendiculaire à AC sa pa-



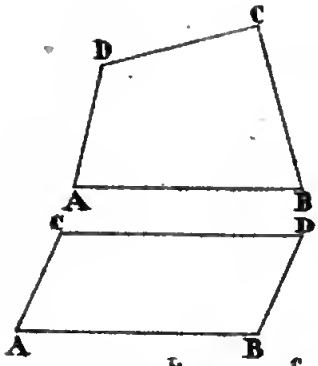
rallèle AH' le sera aussi et on aura : H'AC = 90°. Par la même raison D'A sera perpendiculaire à AB ou D'AB = 90°. Donc D'AB = H'AC ; retranchant de part et d'autre l'angle H'AB, il vient : D'AB — H'AB = H'AC — H'AB ou D'AH' = BAC, mais D'AH' est égal à DGH comme angles ayant les côtés parallèles et de même sens. Donc DGH = BAC.

2° *Hyp.* : HG perpendiculaire à AC.
DG id. AB.
But : BAC + DGH = 180°



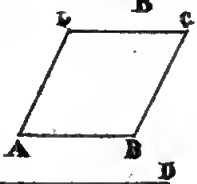
Prolongeons HG ; on démontrerait comme précédemment que DGK = BAC, mais DGH est supplémentaire de DGK. Donc DGH sera aussi supplémentaire de BAC. Pour reconnaître dans quel cas les angles seront égaux ou supplémentaires, il faut supposer qu'on chemine suivant les directions de chacun des côtés de l'un des angles ; si les directions des côtés qui leur sont respectivement perpendiculaires sont toutes deux de droite à gauche ou de gauche à droite, les angles sont égaux. Si l'une est de droite à gauche, l'autre de gauche à droite ou réciproquement, les angles sont supplémentaires.

QUADRILATÈRES.

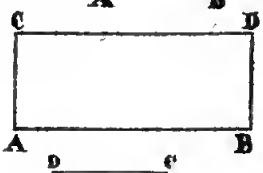


On appelle *quadrilatère* une figure plane terminée par quatre droites. Exemple ABCD.

Parmi les quadrilatères on en distingue 5 de remarquables : Le *parallélogramme* ou *rhombe*, la *losange*, le *rectangle*, le *carré* et enfin le *trapèze*.



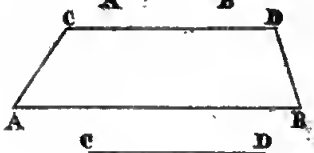
Le parallélogramme a ses côtés opposés parallèles. Exemple : AB parallèle à CD. AC parallèle à BD.



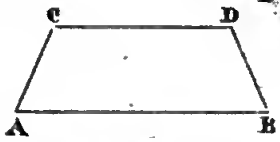
La losange est un parallélogramme qui a ses quatre côtés égaux. Exemple : AB=BC=CD=AD.

Le rectangle est un parallélogramme qui a les angles droits. Exemple : A=B=C=D=90°.

Le carré est un rectangle qui a les côtés égaux. AB=BC=CD=AD. A=B=C=D=90°.

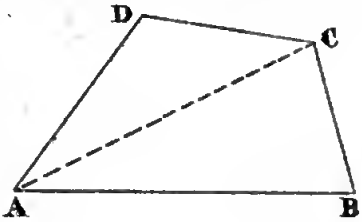


Le trapèze est un quadrilatère qui a deux côtés parallèles. AB parallèle à CD.



Il est dit isocèle si les deux côtés non parallèles sont égaux. AC=BD.

Théorème 51. — *La somme des quatre angles d'un quadrilatère est égale à quatre droits ou* 360°.



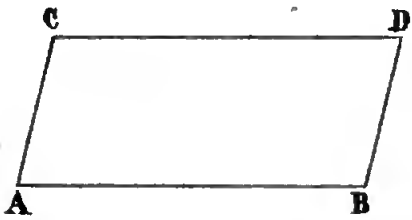
Hyp.: On donne le quadrilatère ABCD.

But: A+B+C+D=360°.

Menons la diagonale AC, on formera deux triangles dont

la somme des angles sera égale à 360°. Or, cette somme n'est autre que celle des angles du quadrilatère. Donc, etc.

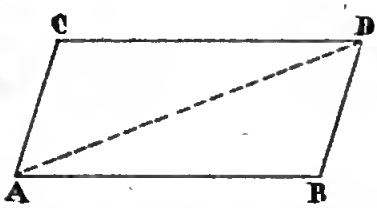
Théorème 52. — *Dans un parallélogramme les côtés opposés sont égaux.*



Hyp.: AB parallèle à CD.
AC id. BD.
But: AB = CD.
AC = BD.

Car nous avons vu que les parallèles comprises entre parallèles sont égales.

Théorème 53. — *Réciproquement si dans un quadrilatère les côtés opposés sont égaux, la figure est un parallélogramme.*

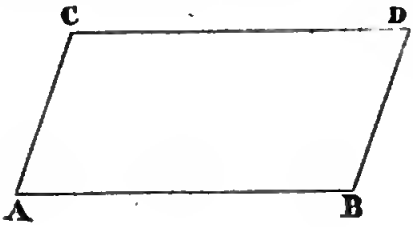


Hyp.: AB = CD.
AC = BD.
But: AB parallèle à CD.
AC id. BD.

En effet supposons par exemple que CD ne soit pas parallèle à AB; menons la diagonale AD; alors les deux angles CDA et DAB ne seraient pas égaux. Mais les triangles ABD et ACD sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun. Donc DAB opposé à DB est égal à CDA opposé à AC, ce qui est contraire à la conclusion précédente. Donc nous avons eu tort de supposer que CD ne fût pas parallèle à AB.

On démontrerait de même que AC est parallèle à BD.

Théorème 54. — *Dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux.*



Hyp.: AB parallèle à CD.
AC id. BD.
But: A = D.
C = B.

Car ils sont formés de côtés parallèles et dirigés en sens inverses.

Théorème 55. — *Réciproquement si dans un quadrilatère les angles opposés sont égaux, la figure est un parallélogramme.*

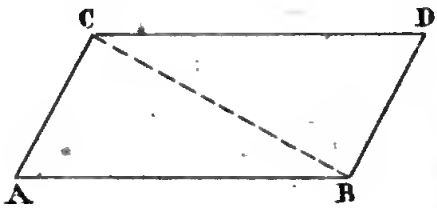
Hyp. : A=D.
C=B.

But : AB parallèle à CD.
AC id. BD.

Car la somme des quatre angles du quadrilatère étant égale à 4 droits ou 360°, A+C qui en est la moitié vaut 2 droits ou 180°, or cela ne pourrait pas être si AB n'était pas parallèle à CD.

On démontrerait de même que AC est parallèle à BD.

Théorème 56. — *Si dans un quadrilatère deux côtés opposés sont égaux et parallèles, la figure est un parallélogramme.*

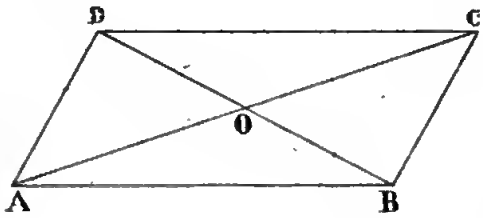


Hyp. : AB parallèle à CD.
AB = CD.

But : AC parallèle à BD.

Menons la diagonale CB. Les deux triangles ABC et CBD sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir : CB commun, AB=CD par hyp. ABC=BCD comme alternes-internes. Donc CBD=BCA, ce sont deux angles alternes-internes. Donc AC est parallèle à BD.

Théorème 57. — *Dans tout parallélogramme les diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales.*



Hyp.: AB parallèle à CD.
AD id. BC.

But : AO = OC.
OB = OD.

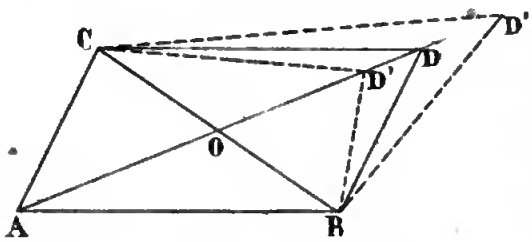
Les deux triangles AOB et COD sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux

angles égaux, savoir : AB = CD comme côtés opposés d'un parallélogramme ; l'angle OAB est égal à l'angle OCD comme alternes-internes. Il en est de même des angles OBA et ODC. Donc OB opposé à OAB est égal à OC opposé à l'angle CDO ; et OA opposé à OBA est égal à OC opposé à ODC.

THEORÈME 58. — *Réciproquement si dans un quadrilatère les diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales, la figure est un parallélogramme.*

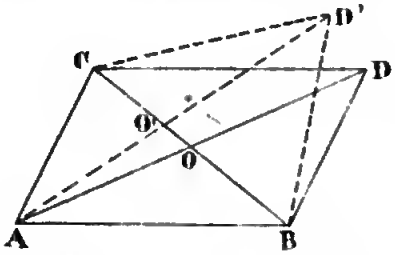
Hyp. : AO = OD, OC = OB.

But : DC parallèle à AB.
BD id. AC.

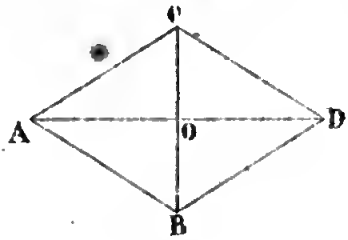


Car si DC et BD ne sont pas parallèles, l'une à AB, l'autre à AC, menons CD' et BD' de manière à satisfaire à cette condition, ces deux droites se rencontreront sur la diagonale AD ou hors de cette diagonale.

1° Si elles se rencontrent en D', sur la diagonale ou sur son prolongement, la figure ABCD' sera un parallélogramme et on aura : AO = OD' ; mais, par hypothèse, AO = OD. Donc OD' serait égale à OD, ce qui est impossible.



2° Si elles se rencontrent hors de la diagonale, la figure ABCD' n'en sera pas moins un parallélogramme, et, par conséquent, O'B = O'C ; mais, par hypothèse, OB = OC. Donc l'une des moitiés OB serait plus petite que l'autre moitié O'B. Donc, etc.



THÉORÈME 59. — *Dans une losange les diagonales se coupent à angles droits.*

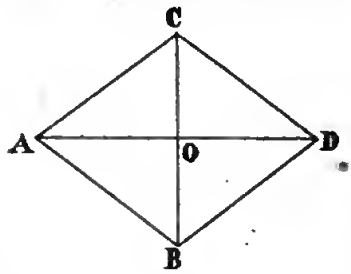
Hyp. : AB = BD = DC = CA.

But : AOC = 90°

En effet la droite CB, ayant deux de ses points C et B à égales distances des extrémités A et D de la droite AD sera perpendiculaire en son milieu.

Théorème 60. — *Réciproquement si dans un parallélogramme les diagonales se coupent à angle droit, la figure est une losange.*

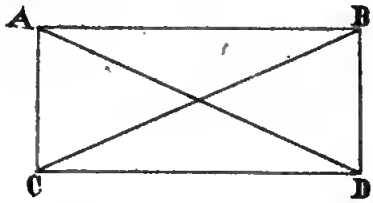
Hyp. : ABCD est un parallélogramme dans lequel AOC=90°.
But : AB=BD=DC=AC.



Cette réciproque n'est qu'une conséquence de celle-ci : si deux obliques ont leurs pieds équidistants de celui de la perpendicnlaire elles sont égales. Puisque AO=OD, on aura donc AC=CD et AB=BD, et à cause de CO=OB, on aura aussi CD=DB. Donc les quatre côtés sont égaux.

Théorème 61. — *Dans un rectangle les diagonales sont égales.*

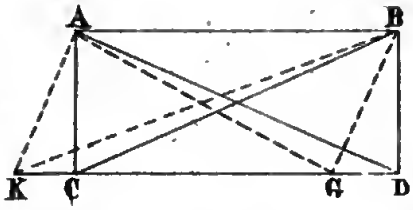
Hyp. : ABCD est un parallélogramme dans lequel A=B=C=D=90°.
But : AD=BC.



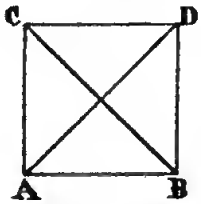
En effet les deux triangles ABD et CBD sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir : ABD=BDC comme droits ; BD commun et AB=CD comme côtés opposés de parallélogramme. Donc AD=BC.

Théorème 62. — *Réciproquement si dans un parallélogramme les diagonales sont égales, la figure est un rectangle.*

Hyp. : ABCD est un parallélogramme dans lequel AD=BC.
But : Les angles A, B, C, D sont droits.



Car si cela n'avait pas lieu, en menant des points A et B les deux perpendiculaires AK, BG, la figure ABGK sera un rectangle dans lequel on aura : AG = BK, mais par hypotèse AD = BC. AD est plus grand que AG, donc il faudrait que BC fût plus grand que BK ce qui n'a pas lieu.



Théorème 63. — *Dans un carré les diagonales sont égales et se coupent à angles droits.*

Car le carré est rectangle et losange à la fois.

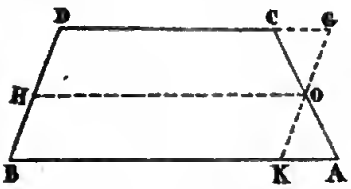
Théorème 64. — *Réciproquement si dans un parallélogramme les diagonales sont égales et se coupent à angles droits, la figure sera un carré.*

Car de ce que les diagonales sont égales, on conclut que la figure est un rectangle et de ce qu'elles se coupent à angles droits, on conclut qu'elle est une losange ; elle est donc rectangle et losange à la fois. Donc c'est un carré.

Théorème 65. — *Si dans un trapèze on mène par le milieu d'un des côtés non parallèles une parallèle à ceux-ci, elle sera égale à leur demi-somme.*

Hyp. : ABCD quadrilatère dans lequel AB est parallèle à CD, OC = OA.

But : $OH = \frac{AB + CD}{2}$.



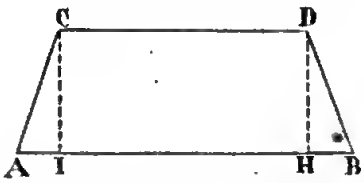
Par le point O menons GK parallèle à BD, et prolongeons CD jusqu'à sa rencontre en G. Les deux triangles résultant GOC et OAK sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux, savoir : OA = OC par hypothèse, les deux angles en O égaux comme opposés par le sommet,

et l'angle OCG=OAK comme alternes-internes. Donc GC=AK. L'inspection de la figure nous donne : CD = GD — GC et AB = BK + AK, ajoutant ces deux égalités membre à membre il vient : CD + AB = GD — GC + BK + AK; observant que GC = AK et que OH est égale à GD et à KB comme parallèles comprises entre parallèles, l'égalité devient : CD + AB = 2OH, d'où $OH = \frac{CD + AB}{2}$.

Théorème 66. — *Dans tout trapèze isocèle les angles adjacents aux côtés parallèles sont égaux.*

Hyp. : AB parallèle à CD, AC = BD.

But : A = B, C = D.

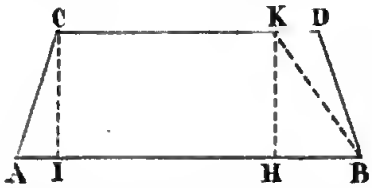


En effet, abaissons des points C et D les perpendiculaires CI et DH sur AB, les deux triangles résultant ACI et BHD seront égaux comme ayant l'hypothénuse égale et un côté égal, savoir : AC = BD par hypothèse, CI = DH comme mesurant la distance des deux parallèles. Donc A = B et ACI = HDB, en ajoutant 1 droit à chacun de ces deux angles, il vient ACD=CDB.

Théorème 67. — *Réciproquement si dans un trapèze les angles adjacents aux côtés parallèles sont égaux, il sera isocèle.*

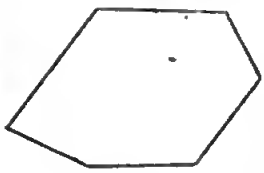
Hyp. : AB parallèle à CD, CAB = ABD.

But : AC = DB.



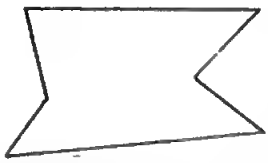
Car supposons que DB ne soit pas égale à AC, abaissons alors du point C une perpendiculaire sur AB, et prenons BH égale à AI, élevons en H la perpendiculaire HK et joignons KB, alors KB sera égale à AC comme hypothénuse de deux triangles rectangles égaux, dès-lors le trapèze ACKB sera isocèle et on aura : A = KBH, mais déjà A = DBH par hypothèse. Donc on aurait : KBH = DBH, ce qui est impossible.

DES POLYGONES EN GÉNÉRAL.



On appelle *polygone* une surface plane limitée par des droites qui en sont les côtés.

Un polygone est dit *convexe* lorsque chacun des angles est moindre que 180°.

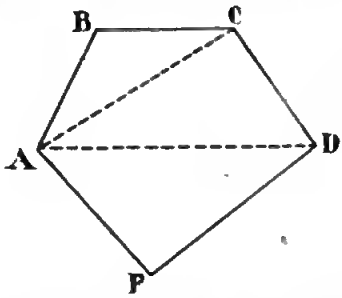


Il est dit à *angles rentrants* lorsqu'un ou plusieurs de ses angles sont plus grands que 180°.

Théorème 68. — *Si dans un polygone convexe on joint un sommet et tous les autres, il sera décomposé en autant de triangles qu'il y a de côtés moins deux.*

Hyp.: ABCDF est un polygone convexe de cinq côtés.

But : Il est décomposé en trois triangles.



Car les triangles extrêmes ABC et AFD empruntent chacun deux côtés au polygone pour leur formation, le triangle intermédiaire (ou les triangles intermédiaires si le polygone était plus compliqué) n'en emprunte qu'un. Donc, etc.

Corollaire. — La somme des angles d'un polygone convexe est égale à autant de fois 180° qu'il y a de côtés moins deux.

FIN DU PREMIER LIVRE.

EXERCICES SUR LE PREMIER LIVRE.

1. Dessiner un vernier qui donne une approximation de $\frac{1}{10}$: la règle principale sera divisée en centimètres, et alors la division du vernier se fera sans d'autre secours que celui du double décimètre.

2. Mesurer avec ce vernier une droite de 25 centimètres, avec un reste tel que le n° 7 du vernier coïncide avec un de ceux de la règle principale.

3. Comment construirait-on un vernier qui donnerait une approximation de $\frac{1}{15}$; les divisions de la règle principale étant des millimètres ?

4. Tracer à l'échelle de $0^m,01$ pour 1 mètre les deux droites $7^m,50$ et $3^m,20$, et chercher leur plus grande commune mesure par le procédé géométrique. En conclure le rapport numérique de ces deux droites.

5. Que valent en nouvelle mesure les arcs 57°, 40° 25′, 50° 10′ 8″ ancienne mesure ?

6. Que valent en ancienne mesure les arcs 95°, 67° 25′, 54° 40′ 75″ nouvelle mesure ?

Nota. Dans toutes les questions suivantes les arcs sont donnés en ancienne mesure, et on fera usage du rapporteur pour les construire.

7. Quelle approximation en minutes donnerait un rapporteur muni d'un vernier circulaire, comprenant 14 demi-degrés et divisé en 15 parties égales.

8. Lire avec ce rapporteur l'arc 35° $\frac{1}{2}$, avec un reste tel que le n° 9 du vernier coïncide avec un de ceux du rapporteur.

9. Mesurer au rapporteur un angle donné. On écrira son indication dans l'ouverture de l'angle.

10. Faire en un point d'une ligne donnée un angle égal à un angle donné.

Application aux pentes des toitures :

Tuiles creuses, tuiles romaines, métal.	limite inférieure 18°. limite supérieure 26°.
Ardoises.	limite inférieure 33°. limite supérieure 45°.
Tuiles plates à crochets.	limite inférieure 45°. limite supérieure 60°.

11. Elever d'un point donné sur une droite une perpendiculaire à cette droite, au moyen du rapporteur.

12. Abaisser d'un point donné hors d'une droite une perpendiculaire à cette droite, par le même moyen.

13. Construire les pentes précédentes par le rapport de la hauteur du comble à la demi-largeur.

Tuiles creuses, tuiles romaines, métal.	limite inférieure $\frac{1}{3}$. limite supérieure $\frac{1}{2}$.
Ardoises.	limite inférieure $\frac{2}{3}$. limite supérieure 1.
Tuiles plates à crochets..	limite inférieure 1. limite supérieure $\frac{17}{10}$.

14. Tracer une suite d'angles adjacents d'un même côté d'une droite, et ayant tous leur sommet sur cette droite. Indication de leur somme.

15. Tracer une suite d'angles autour d'un point. Indication de leur somme.

16. Tracer deux droites qui se coupent. Relation des angles opposés par le sommet.

17. Dessiner un triangle scalène. Relation des angles quand on connaît l'ordre de grandeur des côtés.

18. Dessiner un triangle rectangle.

19. Dessiner un triangle isocèle, en se fondant sur l'égalité des angles opposés aux côtés égaux.

20. Construire un triangle dont on donne un côté de $4^m,50$ et les deux angles adjacents 30° 20′ et 45° 30′.

Nota. Dans cette question et les suivantes, on fera usage de l'échelle $0^m,01$ pour 1 mètre.

21. Construire un triangle dont on donne deux côtés : $3^m,50$, $4^m,25$, et l'angle compris 50° 10′.

22. Construire un triangle rectangle dont on donne l'hypothénuse $5^m,60$, et l'un des angles 30° 40′.

23. Construire un triangle rectangle dont on donne l'un des côtés de l'angle droit $4^m,30$, et l'angle aigu adjacent 40° 20′.

24. Dessiner deux obliques dont les pieds soient équidistants de celui de la perpendiculaire. Relation de ces obliques.

25. Dessiner deux obliques dont les pieds sont inégalement distants de celui de la perpendiculaire. Relation de ces obliques.

26. Dessiner trois droites qui se coupent deux à deux. Indication des angles correspondants, alternes-internes, alternes-externes, intérieurs, extérieurs.

27. Dessiner deux parallèles coupées par une sécante. Relations des angles correspondants, alternes-internes, alternes-externes, intérieurs, extérieurs.

28. Mener par un point donné une parallèle à une droite donnée : 1° au moyen du rapporteur ; 2° au moyen de l'équerre.

29. Lever une courbe par abscisses et par ordonnées.

30. Dessiner un contour rampant d'après un modèle non rampant.

31. Dessiner un triangle équilatéral en se fondant sur l'égalité des angles opposés aux côtés égaux. Valeur de chaque angle.

32. Dessiner un triangle rectangle isocèle en se fondant sur l'égalité des angles adjacents à l'hypothénuse. Valeur de chacun de ces angles.

33. Dessiner un triangle et prolonger l'un des côtés. Valeur de l'angle extérieur.

34. Tracer deux angles ayant les côtés parallèles : 1° de même sens ; 2° de sens contraire ; 3° les uns de même sens, les autres de sens contraire. Relations qui existent entre eux.

35. Tracer deux angles ayant les côtés perpendiculaires ; deux cas. Relations qui existent entre eux.

36. Dessiner un parallélogramme dont on donne les côtés adjacents : $4^m,30$ et $2^m,60$, l'angle compris 60° 25′.

37. Dessiner un parallélogramme dont on donne les deux diagonales $6^m,30$, $5^m,50$ et l'angle compris 60° 30′.

38. Dessiner un rectangle dont on donne les côtés adjacents : $4^m,60$ et $2^m,70$.

39. Dessiner un rectangle dont on donne la diagonale $4^m,50$ et l'angle de celle-ci avec l'autre 75° 20′.

40. Dessiner une losange dont on donne l'un des côtés $3^m,20$ et l'angle de deux côtés adjacents 72° 40′.

41. Dessiner une losange dont on donne les deux diagonales $5^m,20$ et $3^m,50$.

42. Dessiner un carré dont on donne le côté $3^m,90$.

43. Dessiner un carré dont on donne la diagonale $4^m,40$.

44. Dessiner un trapèze quelconque, mener par le milieu d'un des côtés non parallèles une parallèle aux deux autres. Relation entre cette droite et les deux côtés parallèles.

45. Dessiner un trapèze isocèle dont on donne les deux côtés parallèles 6^m, $4^m,20$ et la hauteur $2^m,50$.

46. Dessiner un trapèze isocèle dont on donne l'un des côtés parallèles $5^m,80$ l'un des angles adjacents 60° 20′ et la hauteur $2^m,75$.

Tracé de Bélidor pour le profil des mansardes.

Ayant décrit un demi-cercle sur la base du comble et élevé une perpendiculaire sur le milieu, on le divise en cinq parties égales. Les droites qui joignent les extrémités de la base aux deux premières divisions de chaque extrémité forment les pentes du *vrai comble* et les cordes qui joignent ces deux points de division à l'extrémité de la perpendiculaire forment le *faux comble*.

FIN DES EXERCICES DU PREMIER LIVRE.

PROBLÈMES DU PREMIER LIVRE.

Un *problème* est une question à résoudre. On distingue dans l'énoncé les *données* et l'*inconnue* ou les *inconnues* de la question.

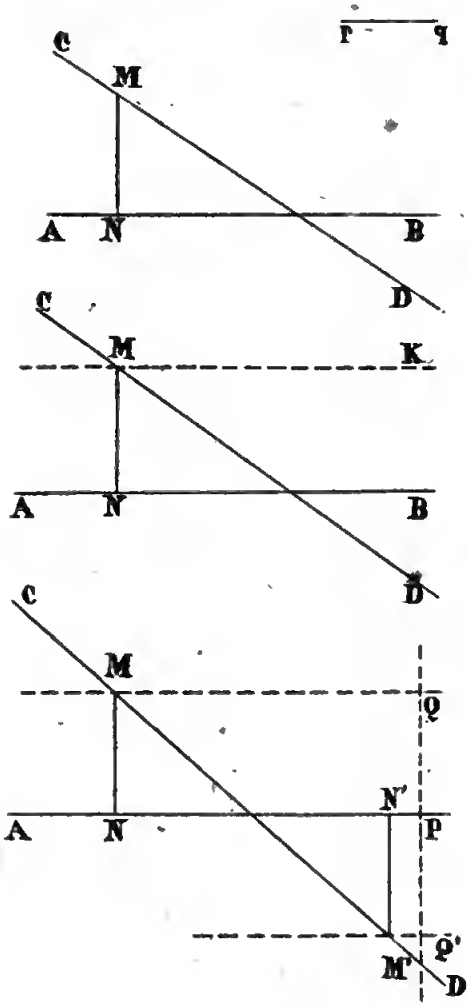
La marche la plus rationelle pour résoudre un problème de géométrie consiste à figurer à peu près et provisoirement les inconnues de la question, pour saisir aisément les relations qui existent entr'elles et les données. C'est ce qu'on appelle faire l'*analyse* du problème. Ces relations une fois saisies permettent de suivre une marche inverse, c'est-à-dire de passer des données aux inconnues par des constructions rigoureuses. C'est faire la *synthèse* du problème.

Quand un problème est résolu, il faut le discuter, c'est-à-dire rechercher s'il est possible d'une ou plusieurs manières, ou en d'autres termes s'il y a une ou plusieurs solutions, enfin dans quels cas il est impossible. Pour trouver toutes les solutions d'un problème, il faut examiner si les constructions auxiliaires peuvent avoir plusieurs dispositions. Dans le cas par exemple où l'inconnue serait un point et où celui-ci s'obtiendrait par la rencontre de deux circonférences ou d'une circonférence et d'une droite, il faudrait considérer les deux points de rencontre résultant de la construction pour conclure si tous deux sont admissibles ou non. Pour arriver aux caractères d'impossibilité, on doit passer en revue les constructions élémentaires qui ont mené à la solution et se demander, si quelles que soient les données, elles sont toujours praticables. Il résultera de cet examen autant de cas d'impossibilité que de constructions non praticables. Pour formuler les conditions de possibilité ou d'impossibilité, il faut les faire peser sur les données de la question et ce n'est

souvent que par des déductions mathématiques qu'on arrive de proche en proche à transformer une condition qui ne met point les données en jeu en une autre qui remplisse ce but.

Ce préambule sera rendu intelligible par des exemples.

Problème 1. *Étant données deux droites, trouver sur l'une d'elles un point distant de l'autre d'une longueur donnée.*



Données : Les deux droites indéfinies AB, CD et la droite limitée *pq*.

Inconnue : Le point M tel que la perpendiculaire MN soit égale à *pq*.

Analyse. — Supposons le point M trouvé et la perpendiculaire MN égale à *pq* construite. Ce point appartiendra nécessairement à la parallèle MK distante de AB de la longueur *pq* et comme il doit aussi appartenir à CD, il se trouvera à leur intersection.

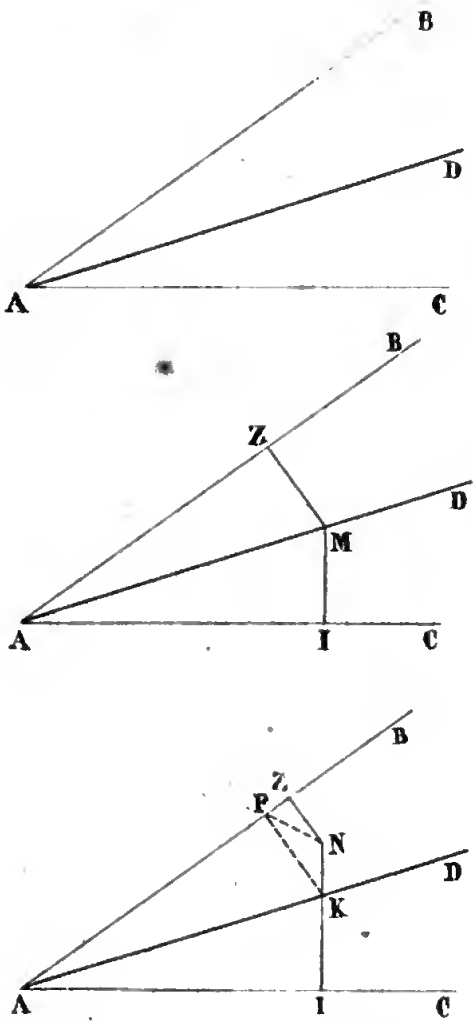
Synthèse.—En un point quelconque de AB, j'élève une perpendiculaire égale à *pq* et par l'extrémité je mène une parallèle à AB; le point de rencontre est le point demandé.

Discussion.—Comme je puis prendre sur la perpendiculaire une longueur égale à *pq* au-dessous aussi bien qu'au-dessus de la droite AB, il résulte que le problème a deux solutions : M et M'.

Le problème n'est possible qu'autant que la parallèle rencontre la droite CD et cela aura lieu à moins qu'elle ne lui soit parallèle. Dans ce dernier cas, les deux droites données le seraient elles-mêmes. Ainsi elles doivent se couper pour que le problème soit possible.

Si les deux droites données étaient parallèles à la distance donnée, tous les points de CD, satisferaient à la question.

Problème 2. — *Trouver la bissectrice d'un angle.*



Donnée : L'angle A.

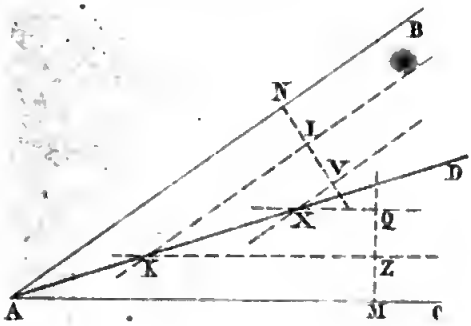
Inconnue. La droite AD telle que l'angle BAD=DAC.

Analyse. — Supposons construite la droite AD.

Observons que tout point M pris sur cette droite est équidistant des côtés AC et AB; ainsi les deux perpendiculaires MI, MZ sont égales, à cause des deux triangles rectangles AMZ, AMI égaux comme ayant l'hypothénuse AM commune et un angle aigu MAZ égal à MAI.

Tout point N pris hors de cette bissectrice est plus près d'un côté que de l'autre. Ainsi la perpendiculaire NZ est plus petite que NI. Pour le démontrer abaissons du point K une perpendiculaire KF sur AB et joignons le point F au point N, le triangle résultant FNK donne : FN < NK + FK ; remplaçons FK par

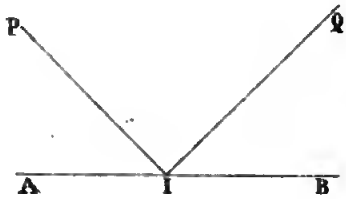
son égale KI et nous aurons : FN < NK + KI ou < NI. Or, NZ est plus petit que NF. Donc, à plus forte raison, aurons-nous NZ < NI. La bissectrice d'un angle est donc le lieu géométrique de tout point équidistant des côtés de cet angle, et comme deux points suffisent pour déterminer une droite, le problème revient à trouver deux points équidistants des deux côtés de l'angle.



Synthèse. — A cet effet, élevons sur AB et AC deux perpendiculaires indéfinies, prenons sur chacune d'elles les distances égales MZ, NI, puis deux autres MQ, NV. Par ces quatre points menons des parallèles aux côtés correspondants : les deux points de rencontre K et X des parallèles équidistantes des côtés seront les points demandés, car ils jouiront de la propriété énoncée.

Discussion. — Le problème est toujours possible même lorsque le sommet est inaccessible*.

Problème 3. — *Etant donnés deux points quelconques au-dessus d'une droite, trouver un point sur celle-ci tel qu'en le joignant aux deux points donnés, les deux angles qui en résultent soient égaux.*

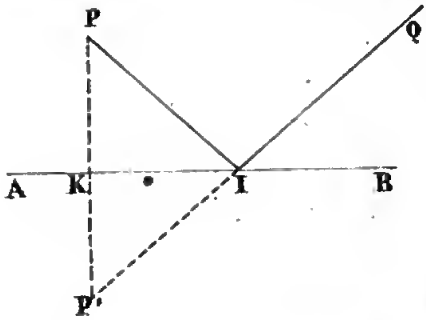


Données : La droite indéfinie AB et les deux points P et Q.

Inconnue : Le point I tel que l'angle AIP = QIB.

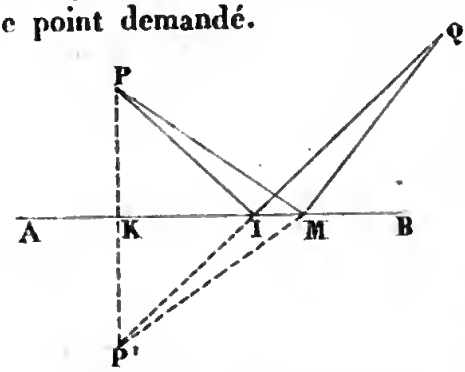
Analyse. — Soit I le point demandé. Prolon-

* Application à la recherche de la capitale d'un bastion.



geons QI indéfiniment, et observons que I est le point de rencontre de AB avec QI; or, la droite AB est donnée, et de la droite QP' on ne connaît que le point Q, il faut en trouver un second. A cet effet, abaissons du point P la perpendiculaire PK et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre avec QP'. Il résulte de cette construction deux triangles PKI et P'KI égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux, savoir : KI commun ; les deux angles en K égaux comme droits, et les deux angles PIK, P'IK, égaux tous deux à l'angle QIB, le premier parce qu'on a supposé le problème résolu, et le second comme opposé par le sommet. Donc PK = P'K ; or, la perpendiculaire PK est connue, donc P'K l'est aussi et la droite QP' est déterminée.

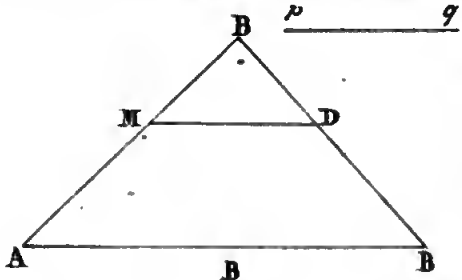
Synthèse. — Du point P abaissons une perpendiculaire PK sur AB, prolongeons-la d'une grandeur égale ; joignons les deux points P' et Q, et le point de rencontre I avec AB est le point demandé.



Discussion. — Le problème est toujours possible. La ligne brisée PIQ est plus courte que toute autre qui joindrait les mêmes points P et Q à un point quelconque M de AB. En effet, joignons le point M au point P', alors MP' = MP comme obliques équidistantes du pied K de la perpendiculaire IK. Le triangle P'QM donne : P'I + IQ < P'M + MQ, remplaçons P'I par PI et P'M par PM, nous aurons : PI + IQ < PM + MQ*.

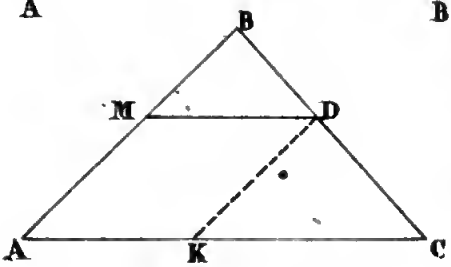
* Application à la loi de réflexion des sons, des rayons de chaleur et de lumière, et des corps élastiques.

Problème 4. — *Etant donné un triangle, trouver sur l'un des côtés un point tel qu'en menant une parallèle à l'un des côtés adjacents, elle soit égale à une ligne donnée.*



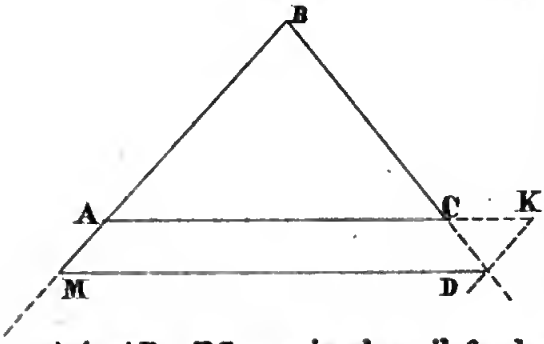
Données : Le triangle ABC et la droite limitée *pq*.

Inconnue : Le point D tel que la parallèle MD soit égale à *pq*.



Analyse. — Supposons le point D connu, et menons par ce point DK parallèle à AB : la figure MDKA est un parallélogramme. Donc AK = MD = *pq*.

Synthèse. — Donc il faut prendre sur AC une grandeur égale à *pq*, mener par le point K une parallèle à AB jusqu'à sa rencontre en D avec BC, et par ce point mener MD parallèle à AC.

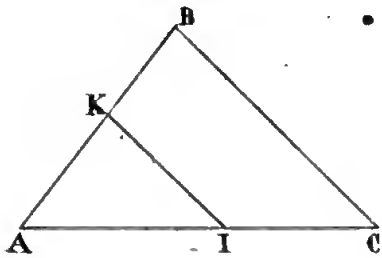


Discussion. — Le problème n'est possible qu'autant que AK et par conséquent *pq* est plus petit que AC. S'il était plus grand, on ne pourrait appliquer la construction précédente qu'en prolongeant les côtés AB, BC ; mais alors il faudrait généraliser l'énoncé *.

Problème 5. — *Etant donné un triangle, trouver sur l'un des côtés, un point tel qu'en menant une parallèle à l'un*

* Application à la charpenterie dans l'épure de la croupe : disposition des arêtiers suivant la loi des homologues.

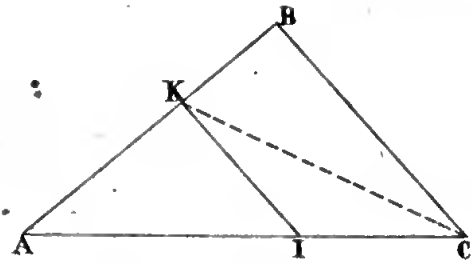
des côtés adjacents, elle soit égale à la distance de ce point à l'extrémité de ce même côté adjacent.



Donnée : Le triangle ABC.

Inconnue : Le point I tel que IK = IC.

Analyse. — Supposons le point I trouvé ; joignons le point K au point C. Le triangle KIC est isocèle, donc l'angle IKC est égal à l'angle ICK ; mais l'angle IKC est égal à l'angle KCB comme alterne-interne ; donc les deux angles en C sont égaux. Par conséquent KC est la bissectrice de l'angle C, par suite le point K est connu et le point I aussi.



Synthèse. — Menez la bissectrice de l'angle C, par son point de rencontre avec AB menez une parallèle à BC, vous aurez le point demandé.

Le problème est toujours possible*.

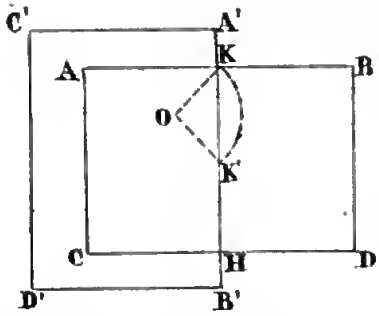
Problème 6. — *Etant donné le rectangle* ABCD, *trouver le point autour duquel il doit tourner pour que le côté* AB *prenne une position* A'B' *perpendiculaire au milieu de sa position primitive, et que les deux petits côtés dans leur nouvelle position, soient équidistants des grands côtés dans leur ancienne.*

Donnée : Le rectangle ABCD.

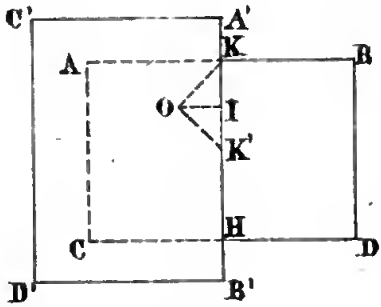
Inconnue : Le point O tel que A'B' soit perpendiculaire au milieu de AB, et que A'K = B'H après un quart de révolution.

Analyse. — Soit O ce point. Après ce quart de révolution

* Application aux arcs rampants composés de deux arcs de cercle, quand on se donne la ligne de naissance et la tangente commune.



le point K, milieu de AB, vient évidemment prendre la position K', milieu de A'B'. L'angle décrit KOK' est droit; en effet, l'angle OKA' extérieur au triangle KOK' vaut la somme des deux intérieurs non-adjacents O + K', il se compose d'ailleurs d'un angle droit AKA' plus de l'angle OKA. Or, l'angle OKA est égal à l'angle K' puisque celui-ci n'est autre que le premier dans sa nouvelle position. Donc l'angle O est égal à l'angle AKA' qui est droit; par suite le triangle KOK' est rectangle, et isocèle à cause des rayons égaux OK et OK'. Donc les angles K et K' valent chacun 45° ou un demi-droit.



Synthèse. — Prenez le milieu du petit axe KH, et aux points K et K' tracez deux droites inclinées à 45° sur KH, leur intersection sera le point demandé.

On peut remarquer que la perpendiculaire OI tombe au milieu de KK' et qu'elle est égale à la moitié de KK'. En effet, le triangle KOK' étant isocèle doit jouir de la première propriété énoncée. Quant à la seconde, observons que le triangle KOI est rectangle en I et que l'angle K vaut 45°; l'angle KOI qui est le complément de ce dernier vaut aussi 45°, par conséquent il est isocèle et OI = IK. Ainsi, comme construction plus simple, on pourra prendre le quart de KH, élever au premier point de division I une perpendiculaire égale à ce quart: l'extrémité donnera le point demandé*.

* Application aux tables à jeu. La largeur de la table doit être évidemment plus grande que la demi-longueur des plus grandes traverses du support.

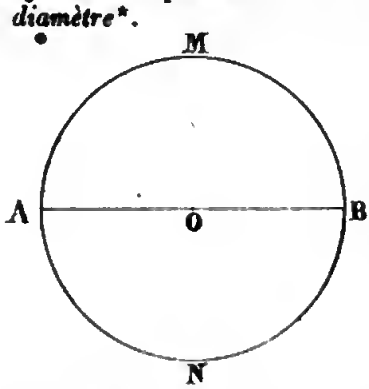
FIN DES PROBLÈMES DU PREMIER LIVRE.

Digitized by Google

LIVRE DEUXIÈME.

Théorème 1. — *Tout diamètre divise le cercle et sa circonférence en deux parties égales.*

Nota. Nous avons vu qu'une circonférence est une ligne courbe dont tous les points sont équidistants d'un point intérieur appelé centre. La portion de plan limitée à cette courbe s'appelle *le cercle*, et la droite qui joint deux points de cette courbe en passant par le centre en est *le diamètre**.

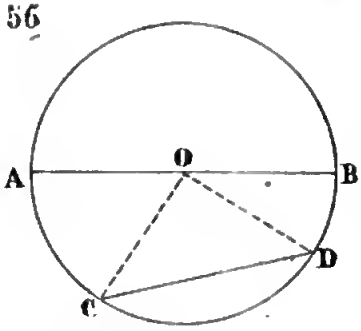


Si nous faisons tourner l'arc AMB autour de AB comme charnière, il s'appliquera exactement sur ANB, sans quoi il y aurait sur l'un ou sur l'autre des points inégalement éloignés du centre, ce qui est contre la définition de la circonférence.

Théorème 2.— *Toute corde est plus petite que le diamètre.*

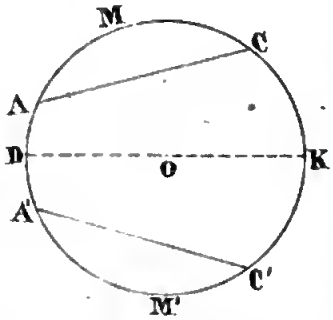
Nota. Une corde est une droite qui joint deux points de la circonférence sans passer par le centre.

* Des différentes espèces de compas et de leurs attirails.

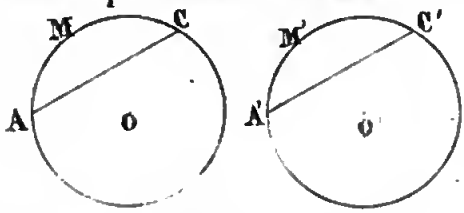


Joignons le centre et les extrémités C et D de la corde CD, alors le triangle COD nous donnera : CD < CO + OD ; or, CO + OD est la somme de deux rayons égale au diamètre. Donc CD < AB.

Théorème 3. — *Dans une même circonférence ou dans des circonférences égales, à des arcs égaux correspondent des cordes égales.*



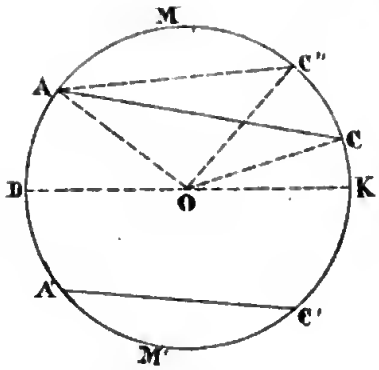
1° Soient AMC, A'M'C' les deux arcs en question, tracés sur la même circonférence. Prenons le milieu de l'arc AA' et menons le diamètre DK par ce milieu. Faisons ensuite tourner la demi-circonférence DMK autour de DK comme axe pour l'appliquer sur son égale DM'K, alors le point A coïncidera avec A', et le point C avec C', puisque l'arc DA est égal à DA', et l'arc AMC à A'M'C'. Donc la corde CA couvrira C'A', puisque d'un point à un autre on ne peut mener qu'une seule droite.



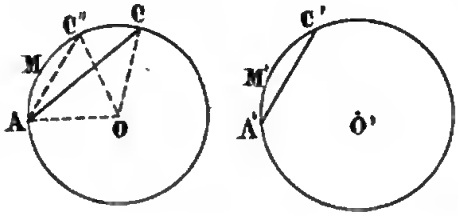
2° Si les deux arcs n'étaient pas tracés sur la même circonférence, la superposition conduirait au même résultat.

Théorème 4. — *Dans une même circonférence ou dans des circonférences égales, à un plus grand arc correspond une plus grande corde.*

1° Soit l'arc AMC > A'M'C', je dis que la corde AC est plus grande que la corde A'C'. Prenons encore le milieu de l'arc AA' et menons le diamètre DK, puis faisons



tourner la demi-circonférence inférieure autour du diamètre DK jusqu'à ce qu'elle coïncide avec la demi-circonférence supérieure, alors le point A' couvrira le point A, et comme l'arc A'M'C' est plus petit que l'arc AMC, le point C' tombera quelque part entre A et C, en C'' par exemple, joignons alors le centre O et les trois points A, C'', C. Le triangle AOC a deux côtés AO, OC égaux aux deux côtés AO, OC'' du triangle AOC''; mais l'angle AOC du premier est plus grand que l'angle AOC'' du second; donc le troisième côté AC du premier, sera plus grand que le troisième côté AC'' ou que son égal A'C' du second.



2° Si les deux arcs étaient situés sur des circonférences égales, la démonstration serait analogue.

Nota. On suppose, dans le premier théorème, que les deux arcs sont tous deux plus petits ou tous deux plus grands qu'une demi-circonférence, et dans le deuxième, que les deux arcs en question sont tous deux plus petits qu'une demi-circonférence, sans quoi la proposition serait inverse.

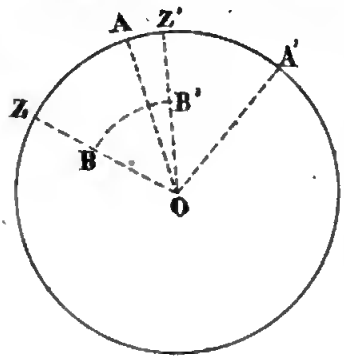
Théorème 5. — Réciproques. — *Réciproquement dans une même circonférence ou dans des circonférences égales, à des cordes égales correspondent des arcs égaux.*

Car si cela n'avait pas lieu, l'un des arcs serait plus grand que l'autre, et, d'après le théorème précédent, la corde correspondante ne serait plus égale à l'autre, ce qui est contre l'hypothèse.

Théorème 6. — *Réciproquement dans une même circonférence ou dans des circonférences égales, à la plus grande corde correspond le plus grand arc.*

Car si cela n'avait pas lieu, à la plus grande corde correspondrait un arc égal ou plus petit ; dans le premier cas, les cordes seraient égales, ce qui est contre l'hypothèse ; dans le second cas, la corde correspondante serait plus petite que l'autre, ce qui est également contraire à l'hypothèse.

Théorème 7. — *Si plusieurs points, liés invariablement entre eux, tournent autour d'un point fixe considéré comme centre, les arcs de cercle qu'ils décrivent correspondent à des angles au centre égaux.*

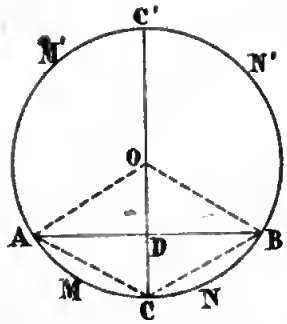


Soient A et B deux des points, supposons qu'après leur mouvement de rotation, ils occupent les positions A' et B', je dis que l'angle AOA' = BOB'. En effet, considérons le point de rencontre Z du rayon OB prolongé, avec la grande circonférence, et le point Z' analogue du rayon OB' : l'arc ZZ' sera évidemment égal à AA' comme arcs de même rayon décrits pendant le même mouvement, mais l'un sert de mesure à l'angle ZOZ' ou BOB', et l'autre à l'angle AOA' ; donc ces deux angles sont égaux.

Théorème 8. — *Toute perpendiculaire abaissée du centre sur une corde, divise cette corde et les arcs sous-tendus en deux parties égales.*

Nota. L'arc sous-tendu par une corde est celui qui est limité à cette corde.

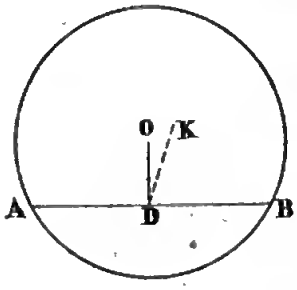
1° Joignons le centre et les extrémités A et B de la corde, les deux triangles résultant AOD et DOB sont égaux comme rectangles ayant l'hypothénuse égale et un côté égal, savoir : AO = OB comme rayon, OD commun. Donc AD = DB.



2° Les deux triangles ADC et CDB sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir : les angles en D droits, AD = DB d'après ce qui précède, CD commun. Donc les deux cordes AC et CB sont égales, et par conséquent les arcs sous-tendus AMC et CNB sont égaux, il en est de même des deux autres arcs AM'C' et BN'C'.

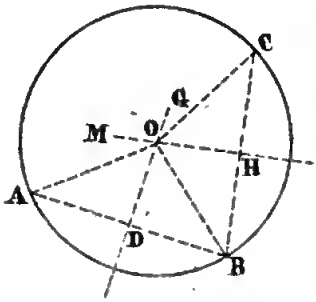
Scholie. — Le centre, le milieu de la corde et les milieux des arcs sont en ligne droite.

Théorème 9. — *Réciproquement toute perpendiculaire au milieu d'une corde, passe par le centre du cercle.*



Supposons que la perpendiculaire DK au milieu de AB ne passe pas par le centre ; abaissons du centre une perpendiculaire sur la corde AB, elle passera par son milieu D, d'après le théorème précédent. Il résulterait de là que du point D on pourrait élever à AB deux perpendiculaires, ce qui est absurde.

Théorème 10. — *Par trois points non en ligne droite on peut toujours faire passer une circonférence, et on ne peut en faire passer qu'une.*



Soient A, B, C les trois points, joignons-les deux à deux, et sur le milieu de AB élevons la perpendiculaire DG ; même construction pour BC. Ces perpendiculaires passeront par le centre, puisque AB et BC sont des cordes. Le centre ne sera donc autre que leur point d'intersection O. OA, OB ou OC sera

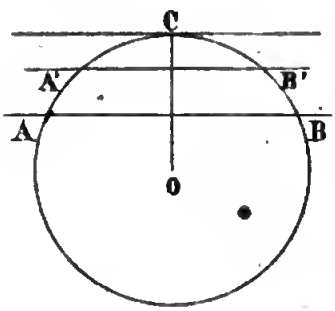
le rayon ; car le point O est équidistant de chacun de ces trois points.

Il est d'ailleurs évident que les deux droites DG et HM se rencontrent toujours ; sans cela elles seraient parallèles, et comme DB est perpendiculaire à DG et BH à HM ; que toute perpendiculaire abaissée d'un point sur une droite est aussi perpendiculaire à sa parallèle, il s'ensuivrait que les trois points D, B, H et par suite A, B, C seraient en ligne droite, ce qui est contre l'hypothèse.

On ne peut en faire passer qu'une. Car en résolvant la question on n'a trouvé qu'un centre et qu'un rayon *.

Théorème 11. — *Toute perpendiculaire à l'extrémité du rayon est tangente.*

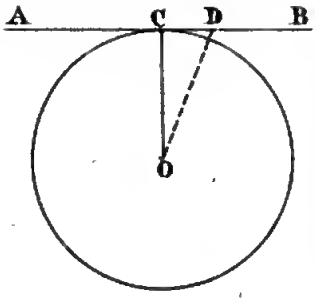
Nota. On appelle *sécante* une corde prolongée dans les deux sens, et *tangente* une sécante dont les deux points d'intersection se confondent en un seul.



Considérons une sécante AB. Abaissons du centre une perpendiculaire à cette sécante, son pied sera le milieu de AB. Cela posé, faisons glisser parallèlement à sa position primitive cette sécante AB. Les points A' et B' seront toujours équidistants de la perpendiculaire OC et s'en rapprocheront de plus en plus. Il arrivera un moment où le point B' coïncidera avec le point C ; alors le point A' coïncidera également, et la sécante sera tangente sans cesser d'être perpendiculaire à OC. Donc, etc.

Théorème 12. — *Réciproquement toute tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon qui passe par le point de contact.*

* Lever du cercle. Instrument propre à vérifier le cercle.

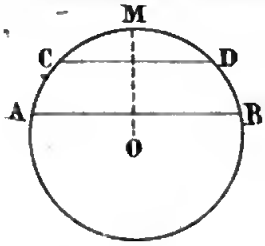


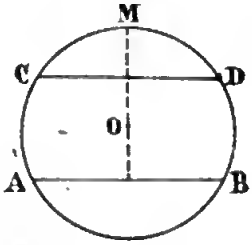
Car si la tangente AB n'était pas perpendiculaire à CO, on pourrait abaisser du centre une perpendiculaire OD sur AB, son pied D serait nécessairement hors du cercle; donc la perpendiculaire OD serait plus longue que l'oblique OC, ce qui est absurde. Donc, etc.

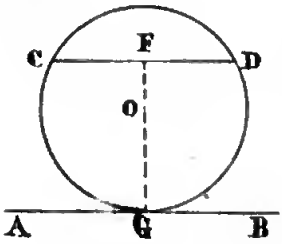
Théorème 13. — *Deux cordes parallèles interceptent sur la circonférence des arcs égaux.*

Il y a quatre cas à examiner :

1° Le centre étant hors de la bande parallèle.
2° Le centre étant compris dans la bande.
3° L'une des cordes étant tangente.
4° Les deux cordes étant tangentes.





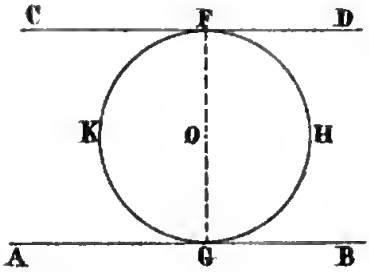


1er Cas. Menons OM perpendiculaire à AB, elle sera aussi perpendiculaire à CD, par conséquent elle partagera en deux parties égales les arcs AMB et CMD, on aura donc : AM = MB et CM = MD. Par suite AM — CM = MB — MD ou AC = BD.

2e Cas. Même construction et même raisonnement.

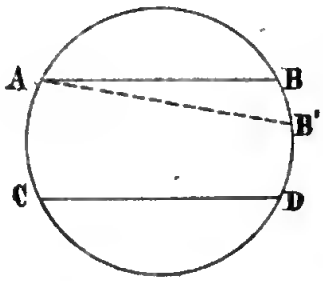
3e Cas. Joignons le centre et le point de contact, alors OG est perpendiculaire à AB, par conséquent à sa parallèle CD; donc elle divise l'arc CGD en deux parties égales.

4e Cas. Joignons le centre et les deux points de contact, les deux droites OG et OF étant perpendiculaires à deux paral-



lèles et menées du même point, sont les prolongements l'une de l'autre ; donc FG est un diamètre. Donc les deux arcs FKG et FHG sont égaux comme demi-circonférences.

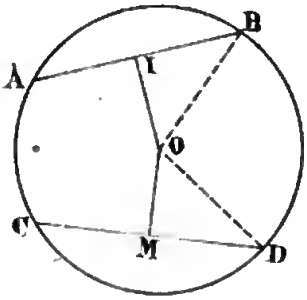
Théorème 14.— *Réciproquement si deux arcs sont égaux, les cordes qui joignent les extrémités correspondantes sont parallèles.*



Si AB n'était pas parallèle à CD, j'en menerais une AB', on aurait alors B'D = AC ; mais on a déjà par hypothèse BD = AC, d'où résulterait BD = B'D, ce qui est impossible. Donc, etc.

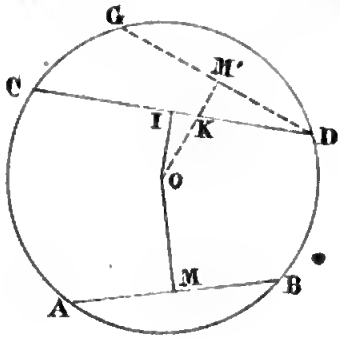
Les autres cas se traiteraient de la même manière.

Théorème 15. — *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, les cordes égales sont équidistantes du centre.*



Soient AB, CD les deux cordes en question, leurs distances au centre seront exprimées par les perpendiculaires OI, OM. Joignons le centre et les points B et D. Les deux triangles OIB et OMD seront égaux comme rectangles ayant l'hypothénuse égale et un côté égal, savoir : OB=OD comme rayons, IB=ID comme moitiés de cordes égales. Donc OI = OM.

Théorème 16. — *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, de deux cordes inégales la plus grande est la moins éloignée.*



Soient AB, CD les deux cordes, je dis que OI est plus petit que OM. Prenons l'arc DG égal à AB et tirons la corde GD ; du centre abaissons sur cette corde la perpendiculaire OM' : elle sera égale à OM d'après le théorème précédent. La figure nous donne : OI < OK et OK < OM'. Donc à plus forte raison OI < OM' ou OI < OM. Ce qu'il fallait démontrer.

Théorème 17. — Réciproques. — *Réciproquement dans un même cercle ou dans des cercles égaux, les cordes équidistantes du centre sont égales.*

Car si cela n'avait pas lieu, l'une serait plus grande que l'autre, et alors elle serait moins éloignée que l'autre, ce qui est contre l'hypothèse.

Théorème 18. — *Réciproquement dans un même cercle ou dans des cercles égaux, de deux cordes inégalement éloignées du centre la moins éloignée est la plus grande.*

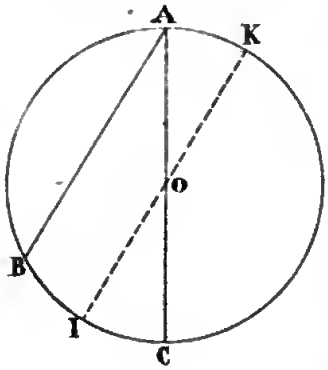
Car si la moins éloignée n'était pas la plus grande elle serait égale à l'autre ou plus petite que l'autre. Dans le 1er cas les deux cordes seraient égales, ce qui est contre l'hypothèse ; dans le 2e cas, la distance au centre correspondante à la plus petite corde serait la plus grande, ce qui est aussi contraire à l'hypothèse.

Théorème 19. — *Tout angle inscrit dans une circonférence a pour mesure ou indication la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

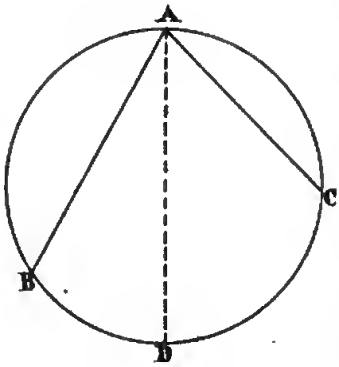
Nota. On appelle angle inscrit dans une circonférence tout angle qui a son sommet sur cette circonférence et dont les côtés sont des cordes.

Nous considérerons trois cas : 1° celui où l'un des côtés passe par le centre ; 2° celui où le centre est compris dans

l'ouverture de l'angle ; 3° celui où le centre est hors de l'angle.

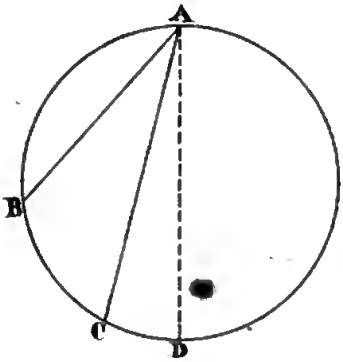


1° Soit BAC l'angle dont il s'agit. Par le centre menons une parallèle IK au côté AB. L'angle IOC résultant est égal à l'angle A : comme c'est un angle au centre il a pour mesure l'arc IC. Donc l'angle A a la même mesure. Mais IC est la moitié de BC ; car BI=AK comme arcs compris entre cordes parallèles, et AK = IC comme servant de mesure à l'angle AOK qui est l'égal de IOC. Donc BI=IC ou $IC = \frac{BC}{2}$.



2° Menons le diamètre AD : l'angle BAC = BAD + DAC ; mais BAD a pour mesure $\frac{BD}{2}$ et DAC a pour mesure $\frac{DC}{2}$. Donc BAC a pour mesure

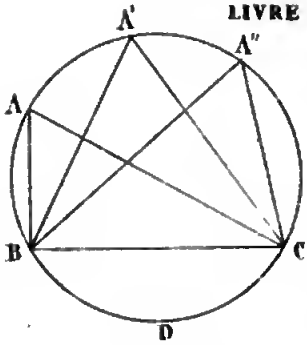
$$\frac{BD}{2} + \frac{DC}{2} \text{ ou } \frac{BD + DC}{2} \text{ ou } \frac{BC}{2}.$$



3° Même construction : l'angle BAC = BAD — CAD. Or, BAD a pour mesure $\frac{BD}{2}$, CAD a pour mesure $\frac{CD}{2}$. Donc BAC a pour mesure $\frac{BD}{2} - \frac{DC}{2}$ ou $\frac{BD - DC}{2}$ ou $\frac{BC}{2}$.

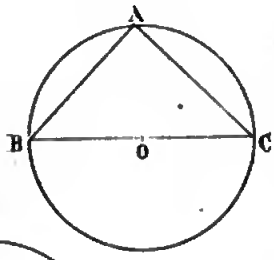
Corollaire 1. — Tous les angles inscrits dans le même segment sont égaux.

On nomme *segment* l'espace compris entre un arc et sa corde.



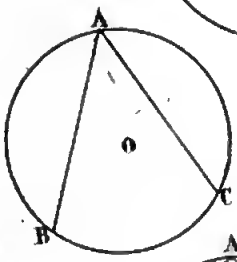
Ainsi tous les angles A, A', A'' sont égaux comme ayant pour mesure la moitié de l'arc BDC.

Corollaire 2. — Tout angle inscrit dans une demi-circonférence est droit, c'est-à-dire, a pour mesure 90°.

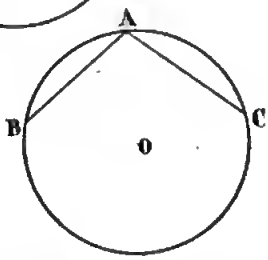


Car il a pour mesure la moitié d'une demi-circonférence ou 90° (l'arc de 90° s'appelle *quadrant*).

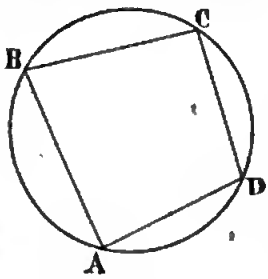
Corollaire 3. — Tout angle inscrit dans un segment plus grand que la demi-circonférence est aigu ; car il a pour mesure la moitié d'un arc plus petit qu'une demi-circonférence.



Tout angle inscrit dans un segment plus petit que la demi-circonférence est obtus ; car il a pour mesure la moitié d'un arc plus grand qu'une demi-circonférence.



THÉORÈME 20. — *Dans tout quadrilatère inscrit la somme des angles opposés a pour mesure* 180°, *ou les angles opposés sont supplémentaires.*

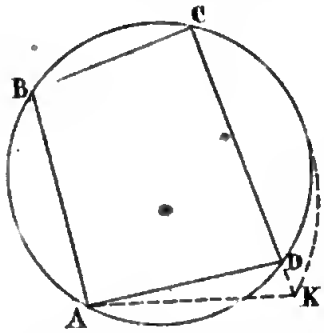


NOTA. On appelle quadrilatère *inscrit* et en général *polygone inscrit* celui dont les côtés sont des cordes à la circonférence, et dont les sommets sont par conséquent situés sur cette même circonférence.

L'angle B a pour mesure la moitié de l'arc ADC ; l'angle D a pour mesure la moitié de l'arc ABC. Donc la somme

de ces deux angles a pour mesure $\frac{ADC}{2} + \frac{ABC}{2}$ ou la moitié de la circonférence ou 180°.

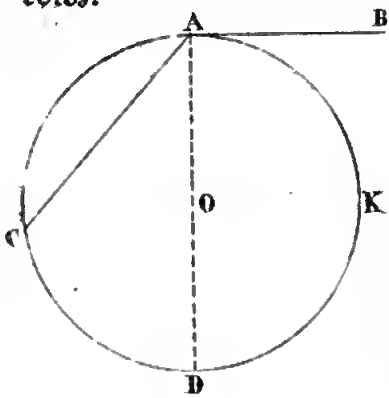
Théorème 30. — *Réciproquement si dans un quadrilatère la somme des angles opposés est de 180° ou deux droits, le quadrilatère est inscriptible.*



Faisons passer une circonférence par les trois points A, B, C, et supposons qu'elle ne passe pas par le quatrième D, mais qu'elle coupe le prolongement de CD en K, joignons le point K au point A. Dans le quadrilatère ABCK, l'angle K est supplémentaire de l'angle B, d'après la proposition directe; mais par hypothèse l'angle D est supplémentaire de l'angle B. Donc l'angle K serait égal à D, ce qui est impossible, attendu que l'angle D extérieur au triangle DAK est plus grand que l'un des intérieurs K non-adjacent.

On prouverait de même que la circonférence ne coupera pas CD. Donc elle passera en D.

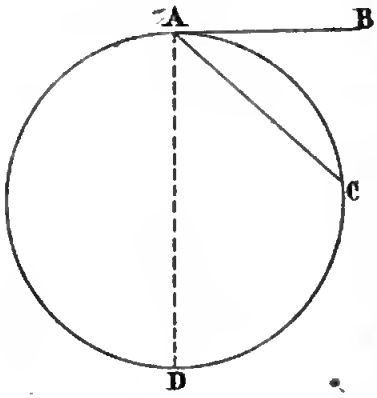
Théorème 31. — *L'angle formé par une tangente et une corde a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*



Nous examinerons deux cas : 1° celui où le centre est compris dans l'angle; 2° celui où le centre est hors de l'angle.

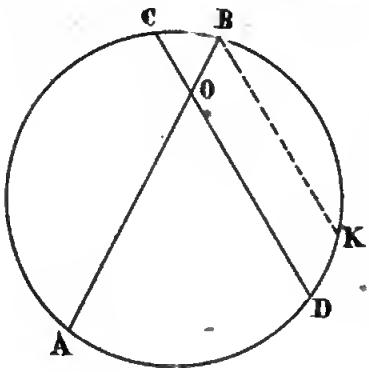
1° Menons le diamètre AD. Puisque AB est une tangente, l'angle BAD est droit : donc il a pour mesure la moitié de la demi-circonférence AKD. Cela posé, l'angle CAB est égal à la somme

des angles CAD et DAB. Or, CAD a pour mesure $\frac{CD}{2}$ et DAB a pour mesure $\frac{DKA}{2}$. Donc CAB a pour mesure $\frac{CD + DKA}{2}$ ou $\frac{CDA}{2}$.

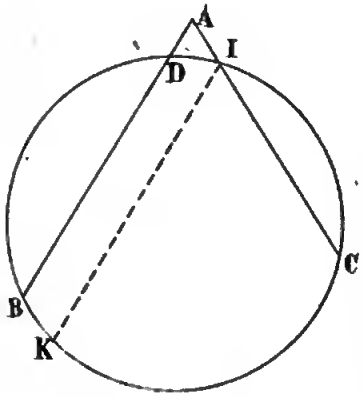


2° Même construction. L'angle BAC = BAD — DAC. Or, BAD a pour mesure l'arc $\frac{ACD}{2}$ et DAC l'arc $\frac{DC}{2}$. Donc BAC a pour mesure $\frac{ACD}{2} - \frac{DC}{2}$ ou $\frac{AC}{2}$.

Théorème 32. — *L'angle formé par deux cordes qui se coupent dans la circonférence a pour mesure la demi-somme des arcs compris entre ces cordes.*



Ainsi AOD a pour mesure $\frac{AD + CB}{2}$. En effet, menons par le point B la parallèle BK à la corde CD, l'angle résultant ABK sera égal à l'angle AOD. Or, l'angle ABK a pour mesure $\frac{AD + DK}{2}$ et comme l'arc DK est égal à CB, cette mesure est la même que $\frac{AD + CB}{2}$. Donc ce sera aussi la mesure de l'angle AOD.

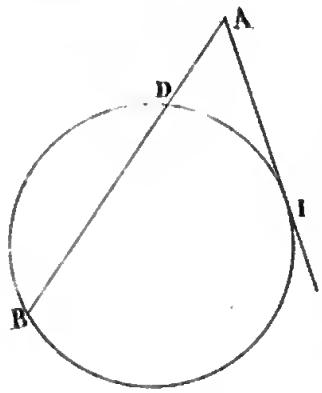


Théorème 33. — *Si deux sécantes se coupent hors d'un cercle, l'angle résultant a pour mesure la demi-différence des arcs compris entre ces sécantes.*

Ainsi l'angle BAC a pour mesure $\frac{BC - DI}{2}$. En effet, menons par le

point I la parallèle IK à la sécante AB. L'angle résultant KIC est égal à l'angle A. Or, il a pour mesure

$$\frac{KC}{2} \text{ ou } \frac{BC - BK}{2} \text{ ou } \frac{BC - DI}{2}.$$

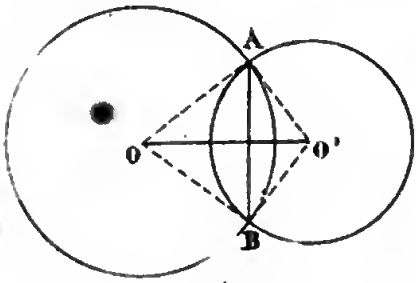


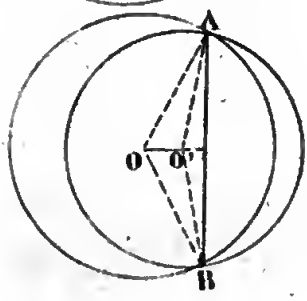
Corollaire. — Si les deux points I et C se confondent en un seul, la sécante AC devient tangente et les arcs BC et DI deviennent BI et DI. L'angle A a donc pour mesure $\frac{BI - DI}{2}$, c'est-à-dire, que *l'angle formé par une sécante et une tangente a pour mesure la demi-différence des arcs compris entre elles.*

THÉORIE DES CONTACTS ET DES INTERSECTIONS DE DEUX CERCLES.

Les trois quantités qui déterminent les positions respectives de deux cercles et leurs grandeurs sont : la distance des centres et les deux rayons.

Théorème 34. — *Lorsque deux cercles se coupent, la ligne des centres est perpendiculaire au milieu de la corde commune.*





Nota. Comme deux cercles peuvent se couper *extérieurement* ou *intérieurement*, c'est-à-dire, de manière que le centre de chacun d'eux soit hors de l'autre, ou que le centre de l'un d'eux soit dans l'autre, le texte a rapport à deux figures.

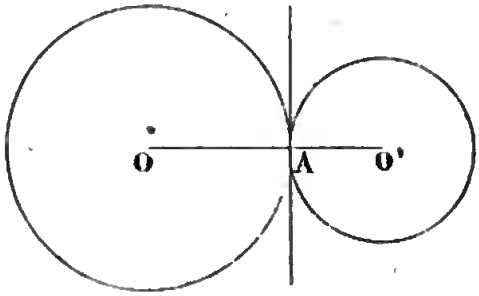
Joignons les centres O et O' aux extrémités de la corde commune AB. Les points O et O' sont respectivement équi-

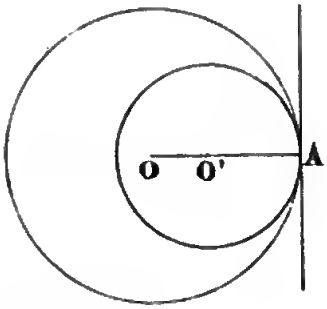
distants des extrémités A et B à cause des rayons égaux AO et OB, AO′ et O′B. Donc la droite OO′ ayant deux de ses points équidistants des extrémités de AB est perpendiculaire en son milieu.

THÉORÈME 35. *Si deux circonférences sont tangentes, la ligne des centres passe par le point de contact.*

Deux circonférences sont dites tangentes lorsqu'étant primitivement sécantes, les deux points d'intersection se sont rapprochés pour se confondre en un seul.

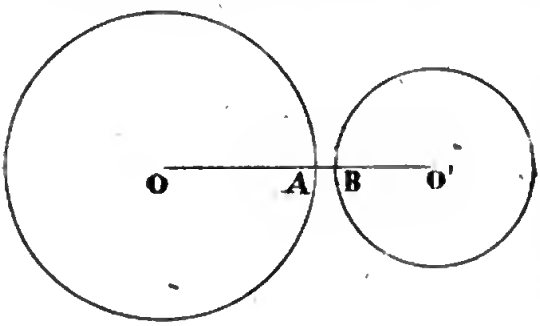
Même observation que précédemment.





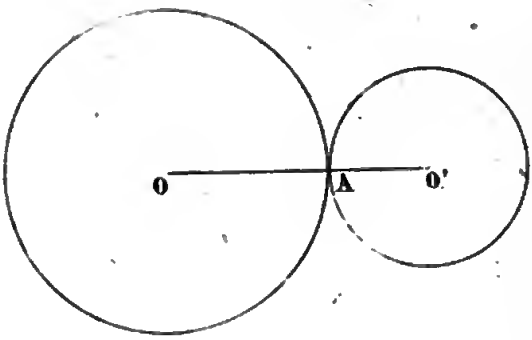
Si dans les figures précédentes, nous supposons que (pour la première) le cercle O′ se meuve de gauche à droite et que (pour la seconde) le cercle O′ se meuve de droite à gauche, les points A et B se rapprocheront l'un de l'autre sans cesser d'être équidistants de la ligne des centres; donc quand l'un d'eux sera sur la ligne des centres, l'autre y sera aussi, les circonférences seront tangentes, et donneront lieu aux figures ci-contre.

Corollaire. — Deux cercles tangents ont même tangente au point de contact et sont dites : *se raccordant* en ce point.



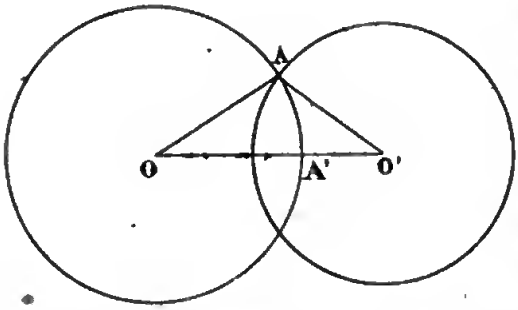
THÉORÈME 36. — *Si deux circonférences sont extérieures, la ligne des centres est plus grande que la somme des rayons.*

On a évidemment :
$OO' > OA + O'B$.



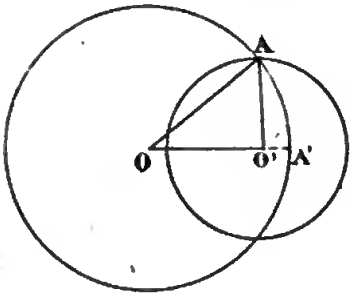
Théorème 37. — *Si deux circonférences sont tangentes extérieurement, la ligne des centres est égale à la somme des rayons.*

On a évidemment : $OO' = OA + O'A$.



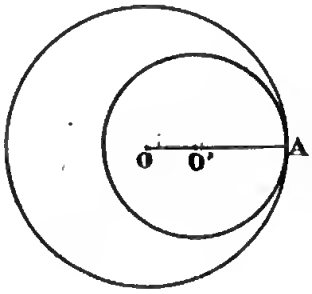
Théorème 38. — *Si deux circonférences se coupent extérieurement, la ligne des centres est plus petite que la somme des rayons, et plus grande que le plus grand des deux rayons.*

On a évidemment : $OO' < OA + O'A$,
et $OO' > OA'$ ou $> OA$.



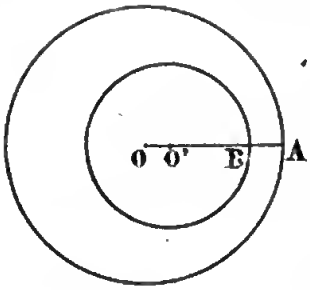
Théorème 39. — *Si deux circonférences se coupent intérieurement, la ligne des centres est plus grande que la diffé^ce des rayons, et plus petite que le plus grand des deux rayons.*

On a par l'inspection de la figure :
$OO' > OA - O'A$,
et $OO' < OA'$ ou $< OA$.



Théorème 40. — *Si deux circonférences sont tangentes intérieurement, la ligne des centres est égale à la différence des rayons.*

On a en effet : $OO' = OA - O'A$.



Théorème 41. — *Si deux circonférences sont intérieures sans se couper, la ligne des centres est plus petite que la différence des rayons.*

La figure donne :

$OO' < OA - O'B$.

Théorème 42. — Réciproques. — *Réciproquement si deux circonférences ont la distance de leurs centres plus grande que la somme des rayons, elles sont extérieures sans se couper.*

Car en les supposant tangentes ou sécantes ou intérieures, on arriverait, d'après les propositions directes, à des conclusions toutes contraires à l'hypothèse.

Toutes les autres réciproques sont faciles à démontrer : le même raisonnement leur est applicable.

FIN DU DEUXIÈME LIVRE.

EXERCICES SUR LE DEUXIÈME LIVRE.

1. Tracer une circonférence, un rayon, un diamètre, une corde. Indication de ces droites.

2. Tracer sur une circonférence deux arcs égaux. Relation des cordes correspondantes.

3. Tracer sur une circonférence deux arcs inégaux. Relation des cordes correspondantes.

4. Abaisser du centre une perpendiculaire sur une corde. Relation entre les deux parties de la corde et les deux parties des arcs sous-tendus.

5. Tracer une tangente à une circonférence en un point donné de celle-ci, au moyen du rapporteur.

6. Tracer deux cordes parallèles. Relation des arcs compris. Quatre cas à examiner.

7. Tracer deux cordes égales avec leurs distances au centre. Relation de ces distances.

8. Tracer deux cordes inégales, avec leurs distances au centre. Relation entre ces distances.

9. Tracer plusieurs angles inscrits dans le même segment. Leur mesure au moyen de l'arc compris.

10. Tracer un angle inscrit dans une demi-circonférence. Sa mesure.

11. Inscrire un quadrilatère dans une circonférence. Relation des angles opposés.

12. Tracer un angle formé d'une tangente et d'une corde. Deux cas. Sa mesure.

13. Tracer un angle formé de deux cordes qui se coupent dans l'intérieur du cercle. Sa mesure.

14. Tracer un angle formé de deux sécantes qui se coupent hors du cercle. Sa mesure.

15. Tracer un angle formé d'une sécante et d'une tangente qui se coupent hors du cercle. Sa mesure.

16. Tracer deux circonférences qui se coupent (deux cas). Relations qui existent entre la corde commune et la ligne des centres.

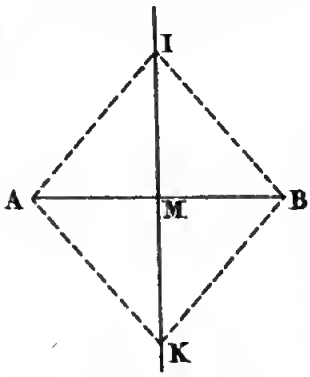
17. Tracer deux circonférences
- extérieures,
- tangentes extérieurement,
- sécantes extérieurement,
- sécantes intérieurement,
- tangentes intérieurement,
- intérieures.

Relations qui existent entre la ligne des centres et les rayons.

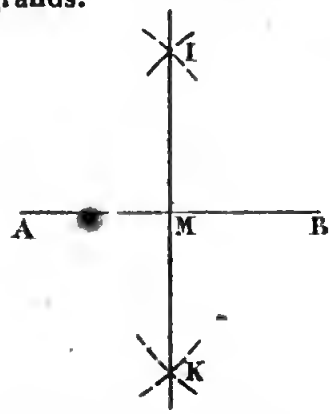
FIN DES EXERCICES DU DEUXIÈME LIVRE.

PROBLÈMES DU DEUXIÈME LIVRE.

Problème 1. — *Elever une perpendiculaire au milieu d'une droite avec la règle et le compas.*



Analyse. — Soit IK cette perpendiculaire. Nous avons vu qu'elle pouvait être déterminée par deux points équidistants des extrémités A et B. Pour plus de simplicité, considérons ces deux points I et K pris à égales distances de M et joignons-les aux extrémités A et B. La figure AIBK sera évidemment une losange. Donc les quatre obliques AI, IB, BK, AK sont égales, et comme les points I et K ont été pris à volonté, les obliques en question sont elles-mêmes arbitraires. Ces deux points peuvent donc être considérés comme appartenant à deux circonférences décrites des points A et B comme centres avec des rayons égaux suffisamment grands.

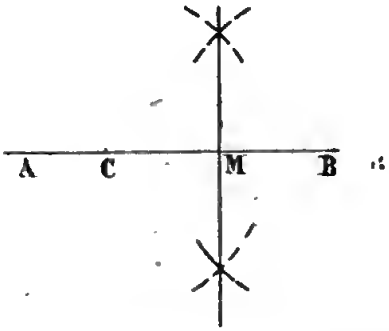


Synthèse. — Des points A et B comme centres avec un rayon suffisant, décrivons deux arcs de cercle qui se coupent et joignons les deux points de rencontre, nous aurons la droite demandée.

Discussion. — Le problème est toujours possible parce que les constructions partielles sont toujours praticables. Les rayons dont nous nous sommes servi sont arbitraires, mais assez grands pour

que les deux circonférences se coupent. Or, pour cela, il faut que la distance des centres ou AB soit plus petite que la somme des rayons, ou que deux fois l'un d'eux, c'est-à-dire, $AB < 2AI$, d'où $\frac{AB}{2} < AI$. Le rayon doit être plus grand que la moitié de AB. Cette moitié est donc la *limite inférieure* du rayon. Plus AI est grand, plus la condition précédente est satisfaite; donc le rayon n'a pas de *limite supérieure*.

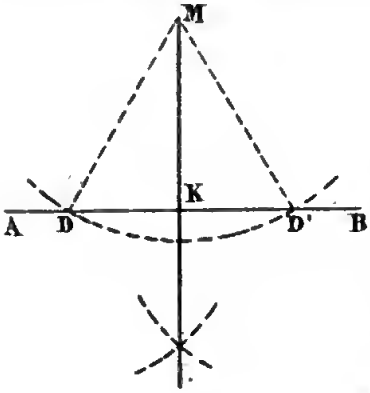
Problème 2. — *Par un point donné sur une droite, élever une perpendiculaire à cette droite.*



Prenons à droite et à gauche du point donné, deux autres points équidistants de celui-ci, et le problème sera ramené au précédent.

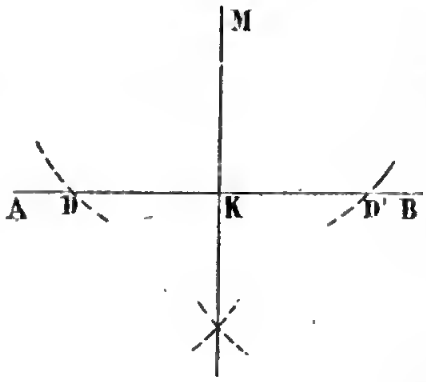
Si le point donné était une des extrémités de la droite donnée, on la prolongerait et on retomberait sur le cas précédent.

Problème 3. — *D'un point donné hors d'une droite, abaisser une perpendiculaire sur cette droite.*



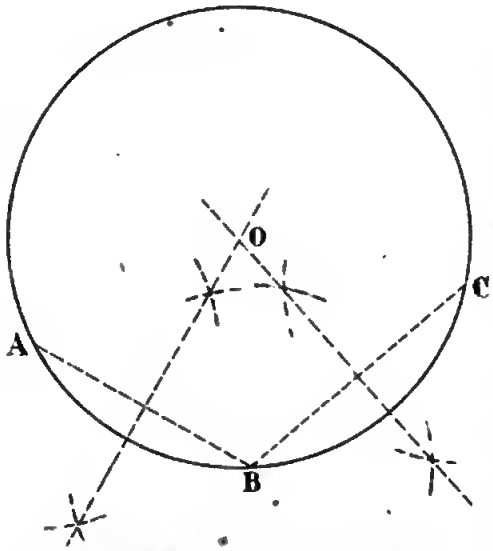
Analyse. — Soit MK cette perpendiculaire. Prenons à partir du pied K à droite et à gauche deux distances égales et arbitraires, KD, KD'. Alors MK sera perpendiculaire au milieu de DD'; si donc DD' était déterminée, le problème serait ramené au précédent. Or, les deux obliques DM, D'M sont égales. Donc les points D et D' appartiennent à une circonférence décrite du point M comme centre. Le rayon de cette circonférence est d'ailleurs arbitraire, car si nous avions pris les points D et D' à une

distance plus ou moins grande, les obliques MD, MD' auraient été plus ou moins grandes.



Synthèse. — Du point M comme centre avec un rayon arbitraire décrivons une circonférence qui coupe AB en deux points D et D'. Elevons une perpendiculaire au milieu de DD'; elle passera par le point M.

Discussion. — Le problème est toujours possible. Le rayon arbitraire a évidemment pour limite inférieure la perpendiculaire MK, et il n'a pas de limite supérieure.



Problème 4.—*Par trois points non en ligne droite faire passer une circonférence.*

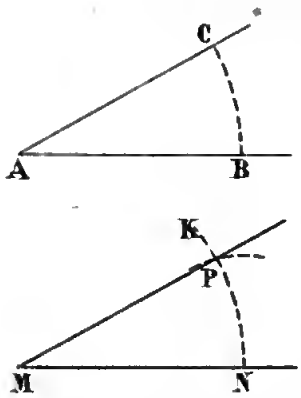
Voyez le théorème 10 du deuxième livre.

Problème 5.— *Trouver le centre d'un cercle ou d'un arc.*

Prenez trois points à volonté sur ce cercle ou sur cet arc, et opérez comme précédemment.

Problème 6.— *Faire avec une droite donnée* MN *et en un point donné* M *comme sommet un angle égal à un autre* BAC.

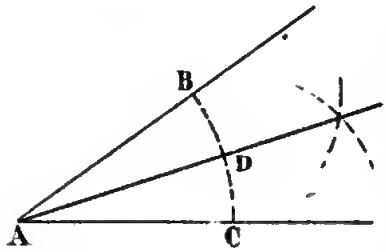
Analyse. — Supposons cet angle NMP construit; si des deux sommets et avec le même rayon, nous décrivons deux arcs de cercle limités aux côtés, ils seront évidemment égaux



comme servant de mesure à des angles égaux ; or, le premier est connu, le second le sera donc.

Synthèse. — Des points A et M comme centres avec des rayons égaux décrivons deux arcs de cercle, prenons sur le second NK une grandeur égale à celle du premier et joignons le point P ainsi obtenu au sommet M*.

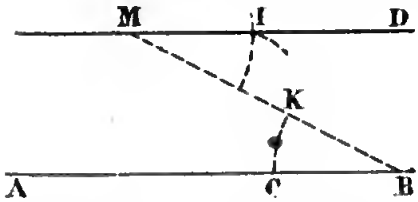
PROBLÈME 7. — *Trouver la bissectrice d'un angle.*



Analyse. — Soit AD cette bissectrice; alors les angles égaux BAD, DAC devront avoir la même mesure et correspondront aux arcs égaux BD, DC appartenant à une même circonférence décrite du point A comme centre. Donc D est le milieu de cet arc.

Synthèse. — Du point A comme centre décrivons un arc de cercle limité aux côtés de l'angle, et abaissons du centre une perpendiculaire sur la corde. Ce sera la bissectrice puisqu'elle divisera l'arc sous-tendu en deux parties égales.

PROBLÈME 8. — *Par un point donné* M, *mener une parallèle à une droite donnée* AB.

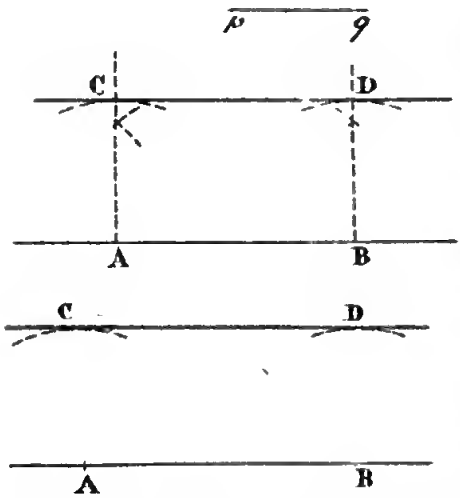


Analyse. — Soit MD cette parallèle. Si par le point M nous menons la sécante MB, les deux angles MBA et BMD seront égaux comme alternes-internes. Or, l'angle MBA est connu, et l'angle BMD son égal déterminera la direction MD.

* De la fausse équerre.

Synthèse. — Du point M menons la sécante quelconque MB et faisons en M avec MB un angle égal à l'angle ABM, la droite résultant MD sera la parallèle. Le problème est toujours possible.

Problème 9. — *Mener une parallèle à une droite donnée à une distance donnée.*



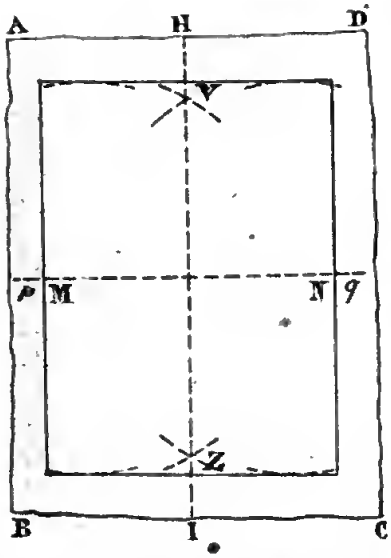
Analyse. — Soit CD cette parallèle : menons les perpendiculaires communes CA et BD. Comme elles sont égales, CD peut être considéré comme une tangente commune aux deux circonférences décrites des points A et B comme centres avec un rayon égal à la distance donnée.

Synthèse. — Des points A et B comme centres avec des rayons égaux à la distance donnée *pq*, décrivons deux arcs de cercle et approchons une règle de ces deux arcs jusqu'à ce qu'elle leur soit tangente. La trace de cette règle sera la parallèle*.

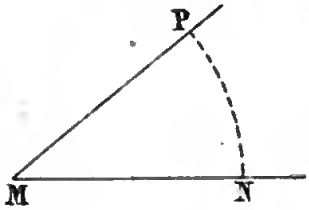
APPLICATION AU TRACÉ D'UN CADRE D'ÉPURE.

On prend les milieux des largeurs AB et CD en pliant la feuille de manière que le coin A coïncide autant que possible avec le coin B, et on pince avec les ongles l'endroit du pli. Même opération pour le milieu de CD. On joint ces points milieux *p* et *q*. On élève une perpendiculaire au milieu de *pq*. (Si les points *p* et *q* étaient trop éloignés pour les branches du compas, on prendrait pour centres deux

* Il y a un moyen théorique de mener cette tangente. Le procédé pratique que nous exposons lui est toujours préféré.

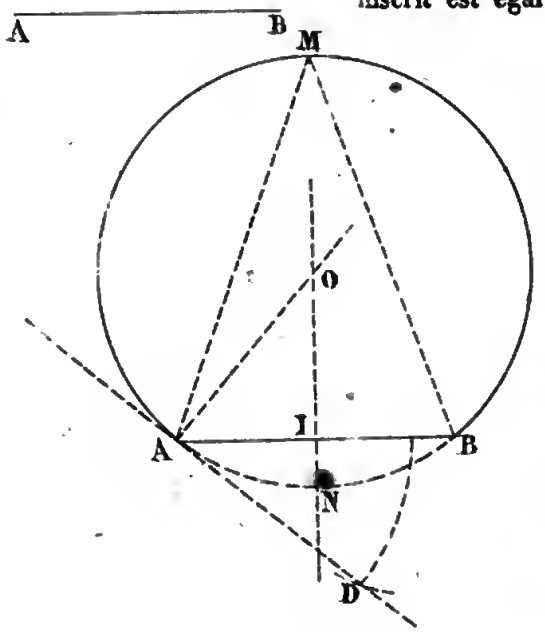


autres points M et N équidistants de p et q.) On a ainsi les deux axes de la feuille. Des points M et N on décrit des arcs de cercle au-dessus et au-dessous du grand axe avec le même rayon : la grandeur de ce rayon est déterminée par la largeur de la marge qu'on veut se ménager. On trace des tangentes communes à chaque couple d'arcs de cercle et on porte sur celles-ci, à partir des points V et Z du petit axe, des longueurs égales de chaque côté, en ayant soin de se ménager une marge égale à celle que l'on a déjà dans le sens de la longueur.



Problème 9. — *Décrire sur une droite donnée* AB *un segment capable d'un angle donné* NMP.

Nota. On appelle *segment capable d'un angle* un arc tel que tout angle qui est inscrit est égal au premier.



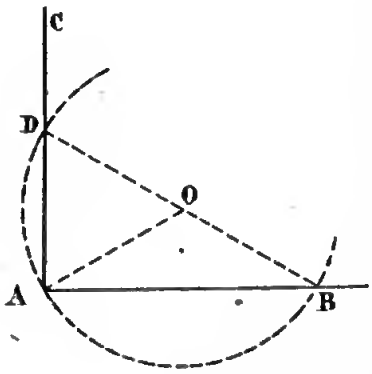
Analyse.— Soit AMB l'arc en question. Pour le déterminer, il suffit d'en connaître le centre et le rayon. A cet effet, remarquons que AB est une corde, et que la perpendiculaire IO en son milieu passe par le centre. En A menons une tangente, l'angle BAD résultant a pour

mesure la moitié de l'arc ANB ; et comme cette moitié d'arc sert aussi de mesure à tout angle AMB inscrit dans le segment ou à l'angle donné, il s'ensuit que l'angle DAB est égal à l'angle donné. Donc la tangente AD est connue, sa perpendiculaire en A passera par le centre : IO y passe déjà. Donc le centre se trouvera à l'intersection de ces deux perpendiculaires, et OA ou OB sera le rayon.

Synthèse. — Au milieu de AB élevons une perpendiculaire IO et faisons en A un angle égal à l'angle donné, en ce point élevons une perpendiculaire à AD, son point de rencontre avec IO donnera le centre ; la droite OA ou OB sera le rayon qui servira à décrire l'arc AMB demandé.

Discussion. — Le problème est toujours possible. Si l'angle est aigu, l'arc est plus grand qu'une demi-circonférence. S'il est droit, le tracé précédent le donne encore égal à une demi-circonférence. S'il est obtus, l'arc est plus petit qu'une demi-circonférence.

Problème 10. — *Elever une perpendiculaire à l'extrémité A d'une droite AB qu'on ne peut prolonger.*

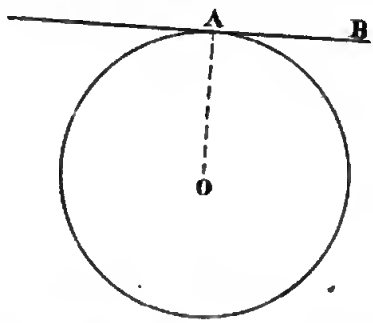


Analyse. — Soit AC cette perpendiculaire. Joignons un point quelconque D de cette perpendiculaire à un point quelconque B de la droite donnée AB. Nous aurons un triangle rectangle ABD dont l'hypothénuse BD pourra être considérée comme le diamètre d'une demi-circonférence dans laquelle l'angle A sera inscrit. Si cette demi-circonférence était connue, le point D de la perpendiculaire résulterait de sa rencontre avec le diamètre BD. Or, son diamètre est quelconque, par suite le centre O aussi à cause des points D et B qui sont arbitraires.

Synthèse. — D'un point quelconque O pris au-dessus de AB avec sa distance au point A pour rayon, décrivons une portion de circonférence qui coupe AB en un second point B, joignons BO et prolongeons jusqu'à la rencontre de cette circonférence en D. AD sera la perpendiculaire.

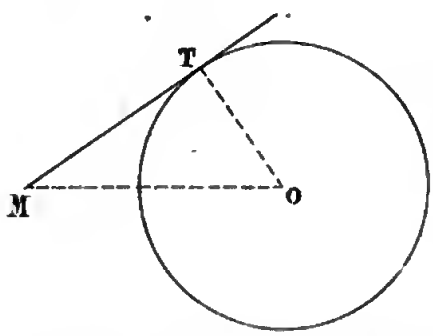
Discussion. — Le problème est toujonrs possible. Comme OA = OB = OD comme rayon, nous conclurons que : *La droite qui joint le sommet de l'angle droit au milieu de l'hypothénuse dans un triangle rectangle, est égale à la demi-hypothénuse.*

Problème 11. — *Mener une tangente à une circonférence par un point donné sur cette circonférence.*

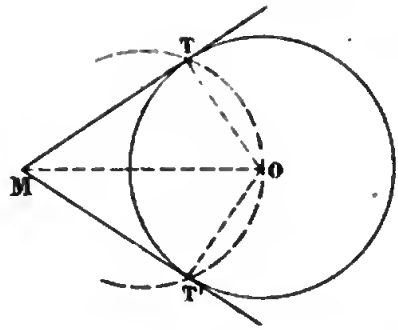


Toute tangente étant perpendiculaire à l'extrémité du rayon qui passe par le point de contact, il s'ensuit qu'il faut joindre le point donné au centre, et élever en ce point une perpendiculaire à ce rayon.

Problème 12. — *Mener une tangente à une circonférence par un point extérieur.*



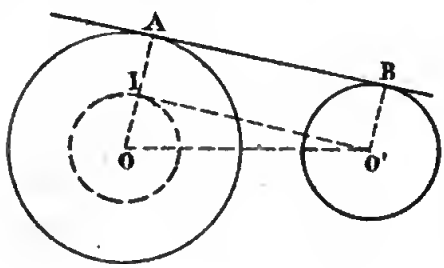
Analyse. — Soit MT cette tangente ; joignons le centre au point de contact et au point M : le triangle résultant MTO est rectangle en T. Donc MO peut être considéré comme le diamètre d'une demi-circonférence dans laquelle l'angle T serait inscrit. Or, ce diamètre est connu, par suite la demi-circonférence l'est aussi ; le point de contact T n'est autre que l'intersection de celle-ci avec la circonférence donnée.



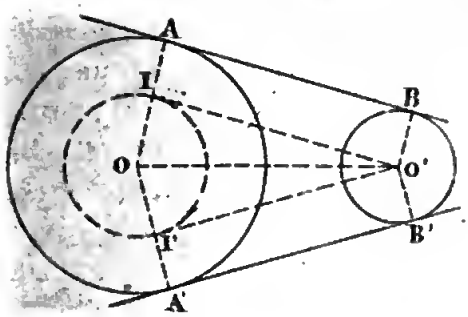
Synthèse. — Joignez le point donné au centre. Sur la droite résultant OM comme diamètre décrivez une circonférence, les deux points d'intersection donneront deux points de contact. Donc le problème a deux solutions.

Discussion.—Le problème est toujours possible. Nous remarquerons que les deux triangles OMT et OMT' sont égaux comme rectangles ayant l'hypothénuse OM commune et un côté égal OT = OT' comme rayon. Donc MT = MT' et l'angle OMT est égal à l'angle OMT'. De là nous conclurons les deux propriétés suivantes : 1° *Les deux tangentes à une circonférence, menées d'un même point, sont égales ;* 2° *la droite qui joint ce point au centre est la bissectrice de l'angle des deux tangentes.*

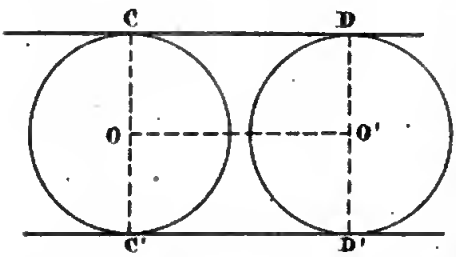
Problème 13. — *Mener une tangente commune à deux circonférences.*



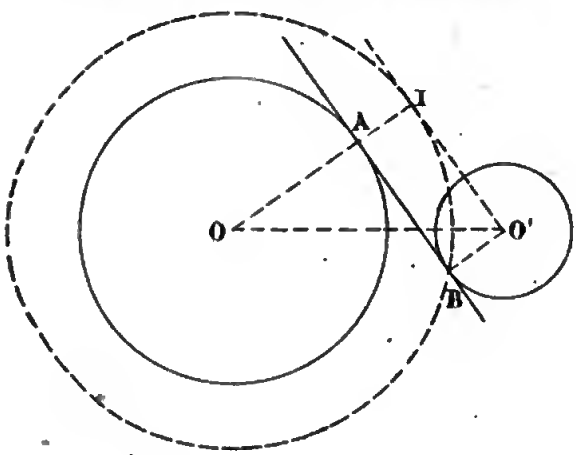
Analyse.—Soit AB cette tangente, joignons les centres aux points de contact, et par le centre O' de la plus petite circonférence menons une parallèle à la tangente commune, elle sera perpendiculaire à OA aussi bien que AB. Donc O'I peut être considérée comme une tangente à la circonférence décrite avec OI pour rayon. Si donc nous connaissions ce rayon, la tangente O'I s'en déduirait, par suite la tangente commune aussi. Or, OI est la différence des rayons, car on a : OI = OA — AI et comme AI = O'B on a : OI = OA — O'B.



Synthèse. — Du centre O du plus grand cercle et avec la différence des 2 rayons, décrivons une circonférence ; du centre O' de la plus petite, menons une tangente O'I à celle-ci, joignons le centre O au point de contract I, et prolongeons OI jusqu'à sa rencontre avec la circonférence en A ; menons par le centre O' une parallèle O'B à OA, et AB sera la tangente demandée. Comme par le point O' on peut mener une seconde tangente O'I', on aura une seconde solution en suivant la même marche.



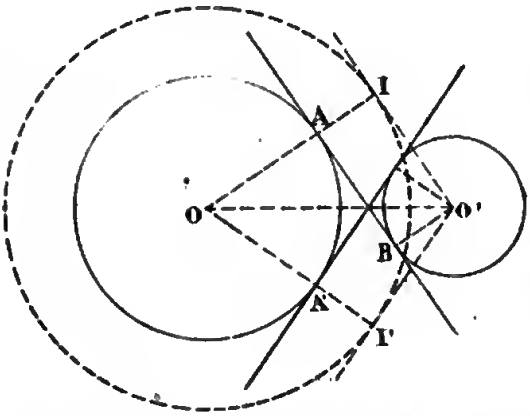
Discussion. — Le problème est toujours possible, à moins que les deux circonférences ne soient intérieures. Si elles sont égales, la tangente commune est parallèle à la ligne des centres, et pour la construire il faut élever des perpendiculaires à la ligne des centres en chacun de ces centres, et joindre leurs points de rencontre C et D avec les circonférences par une droite CD qui sera la tangente.



Dans l'analyse précédente, nous avons supposé la tangente disposée d'une certaine manière, on pouvait la supposer placée comme dans la figure en marge.

Analyse de ce cas. — Comme précédemment, menons la ligne des centres et joignons

les points de contact A et B aux centres O et O', puis menons de même la parallèle O'I jusqu'à sa rencontre avec OA prolongée. Alors O'I sera perpendiculaire à OA aussi bien que AB et pourra être considérée comme une tangente à la circonférence OI. Si cette tangente était connue, sa parallèle AB le serait. Or OI est la somme des rayons OA + O'B, car on a : OI = OA + AI, AI = O'B, donc OI = OA + O'B. La circonférence OI est donc connue et sa tangente aussi.

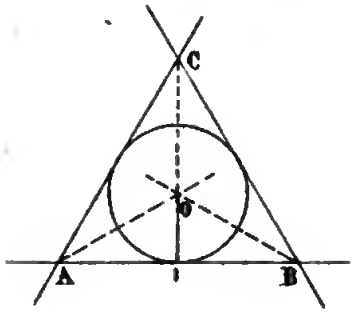


Synthèse.—Du centre de la plus grande circonférence avec la somme des rayons, décrivons une circonférence ; du centre de la petite, menons une tangente OI et joignons le centre de la grande au point de contact I ; par le centre de la petite, menons la parallèle O'B à OI et joignons les points A et B par une droite. Ce sera la tangente demandée. En profitant de la même manière de la seconde tangente O'I', nous obtiendrons une seconde solution.

Discussion. — Le problème n'est possible qu'autant qu'on peut mener du centre O' une tangente à la circonférence OI, ce qui revient à dire que le point O' doit être extérieur à cette circonférence. Or cela aura lieu toutes les fois que OO' sera plus grand que OI ou que la somme des rayons. Cette condition est celle qui caractérise deux circonférences extérieures. Donc en résumé les circonférences données doivent être extérieures.

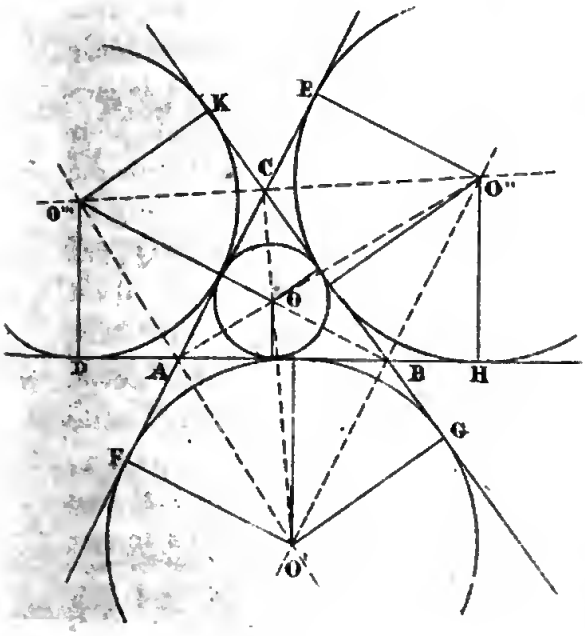
Problème 14. — *Tracer un cercle tangent à trois droites données.*

Analyse.—Supposons ce cercle tracé. Alors les deux droites AB et AC sont deux tangentes partant du même point, la bissectrice



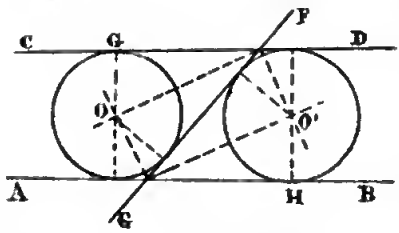
de leur angle A passera par le centre de la circonférence ; même raisonnement pour les angles C et B. Le rayon OI sera obtenu en abaissant du centre O une perpendiculaire sur l'une des tangentes.

Synthèse. — Menons les trois bissectrices AO, BO, CO des angles A, B, C ; leur point de rencontre donnera le centre : abaissons de ce point une perpendiculaire OI sur l'une des droites AB, et nous aurons le rayon.



Discussion. — Si nous construisons les bissectrices des trois angles FCG, FAB, ABG, nous aurons un nouveau centre O', et en abaissant une perpendiculaire sur FC par exemple, nous aurons le rayon correspondant qui nous donnera une seconde solution de la question. Considérant chacun des groupes d'angles : HBC, BCE, HAE et KBD, CAD, ACK pour opérer comme précédemment, nous en déduirons encore deux solutions. En résumé, le problème a quatre solutions.

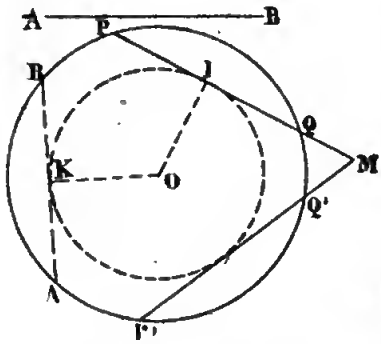
Les bissectrices O'B, BO'' sont en ligne droite ; il en est de même de O''C et O'''C ; de O'A et O'''A ; de plus elles sont perpendiculaires sur celles du triangle ABC.



Si deux des droites sont parallèles, coupées par une troisième, le problème n'a que deux solutions. Si les trois droites sont parallèles, il est impossible.

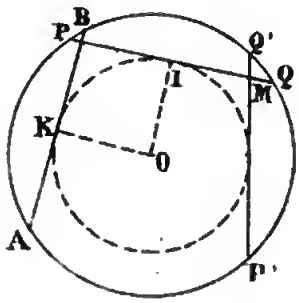
Problème 15. — *Par un point donné dans le plan d'un cercle, mener une sécante telle que la corde comprise soit égale à une ligne donnée.*

1° Le point donné étant extérieur.



Analyse. — Soit MP cette sécante. Abaissons du centre une perpendiculaire OI ; alors MP pourra être considérée comme une tangente à la circonférence qui aurait pour rayon OI. Or ce rayon exprime la distance du centre à PQ ou à toute corde égale à PQ, par conséquent à AB ; donc il est connu et la tangente s'en déduira.

Synthèse. — Inscrivez dans la circonférence une corde égale à AB. Abaissez du centre une perpendiculaire OK à cette corde. Du centre O avec cette perpendiculaire pour rayon, décrivez une circonférence et menez du point donné M une tangente MP à cette circonférence. Comme on peut en mener une seconde MP', le problème a deux solutions.

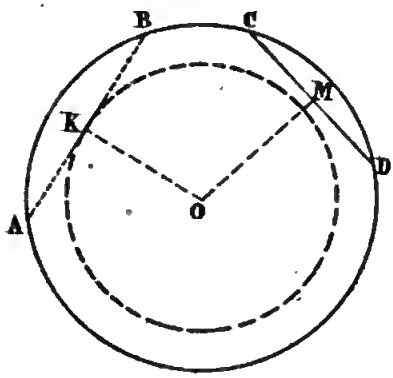


Discussion. — Le problème n'est possible qu'autant que la droite donnée est plus petite que le diamètre du cercle donné, ou lui est tout au plus égale. Il n'y a pas de limite inférieure.

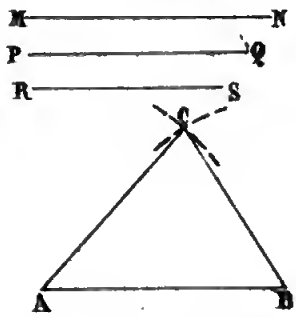
2° Le point donné étant intérieur.

L'analyse conduit à la même construction.

Discussion. — Le problème n'est possible qu'autant que : 1° la droite donnée est plus petite que le diamètre ; 2° qu'autant que le point M est extérieur à la circonférence OK, ou, en d'autres termes, que OK sera plus petit que OM ; mais si OK est plus petit que OM, la corde AB est plus grande que la corde CD perpendiculaire à OM. Donc la droite donnée a pour limite supérieure le diamètre du cercle donné, et pour limite inférieure la corde perpendiculaire à OM.



Problème 16. — *Construire un triangle dont on donne les trois côtés.*



Traçons une droite AB égale à MN, et du point A comme centre avec PQ pour rayon décrivons un arc de cercle ; du point B avec RS pour rayon décrivons un autre arc de cercle qui coupe le premier en C, joignons ce point aux deux extrémités A et B ; nous aurons le triangle demandé *.

Discussion. — Pour que le problème soit possible, il faut que les deux arcs de cercle se coupent ou que la ligne des centres AB soit plus petite que la somme des rayons AC et BC, et plus grande que leur différence AC — BC, ce qui revient à dire que l'un des côtés doit être plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence.

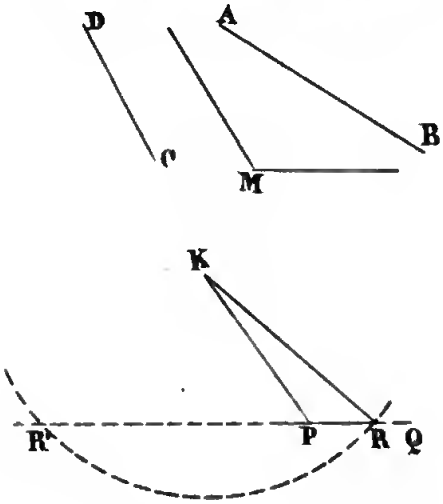
On n'a pas considéré le second point de rencontre des

* Application du tracé du triangle équilatéral à la recherche des joints d'une plate-bande.

arcs de cercle, parce qu'il aurait donné lieu à un second triangle égal à ABC.

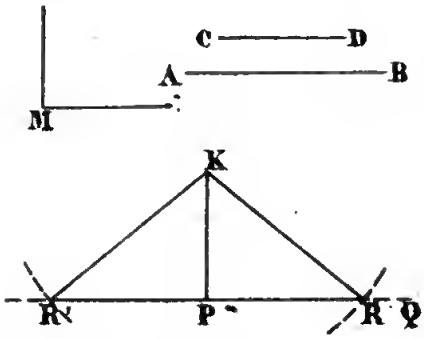
Problème 17. — *Construire un triangle dont on donne deux côtés et l'un des angles opposés.*

Il peut se présenter trois cas : 1° l'angle donné peut être obtus ; 2° droit ; 3° aigu.



1° L'angle étant obtus, traçons une droite indéfinie PQ et faisons en P un angle égal à M ; prenons sur PK une longueur égale à CD et décrivons du point K comme centre avec le côté AB opposé à l'angle, un arc de cercle qui coupera généralement la droite indéfinie en deux points R et R' dont l'un R satisfait seul à la question. Joignons KR.

Discussion. — Il faut que l'arc rencontre la droite indéfinie du côté de l'ouverture de l'angle, ce qui exige que AB soit plus grand que KP ou CD.

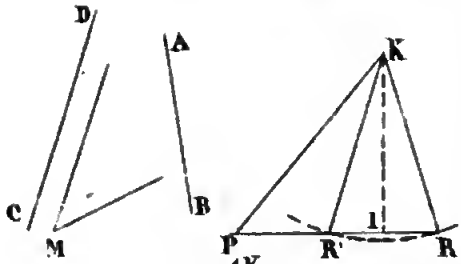


2° L'angle étant droit. Même procédé.

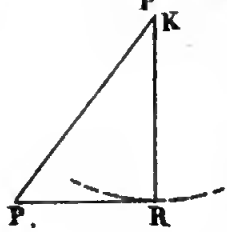
Discussion. — On reconnaît comme précédemment que KR ou AB doit être plus grand que KP ou CD.

Ici les deux points de rencontre donnent deux solutions qui se réduisent à une seule à cause de l'égalité des triangles.

3° L'angle étant aigu. Même procédé.

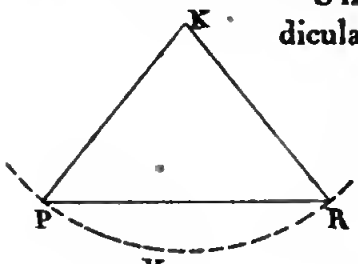


Discussion. — Les deux triangles PKR, PKR' répondent à la question quand le côté KR ou AB opposé à l'angle, est plus petit que le côté adjacent PK ou CD, et en même temps plus grand que la perpendiculaire KI.

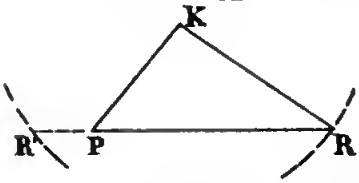


Si le côté opposé est égal à la perpendiculaire KR, l'arc de cercle est tangent, et le problème n'a qu'une solution.

S'il est plus petit que cette perpendiculaire, le problème est impossible.

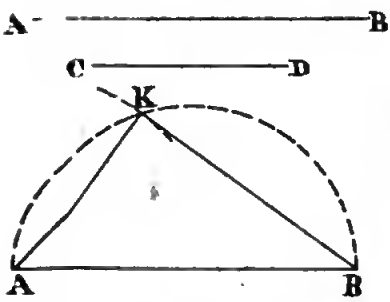


Si le côté opposé est égal à PK ou CD, le triangle est isocèle et le problème n'a qu'une solution.



S'il est plus grand que le côté adjacent PK, le second point R' de l'arc ne répond plus à la question, et le problème n'a qu'une solution*.

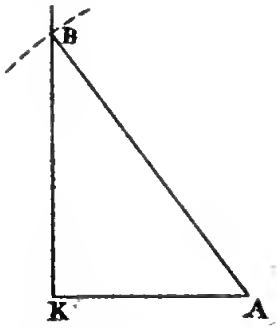
Problème 18. — *Construire un triangle rectangle dont on donne l'hypothénuse et un autre côté.*



1er *Procédé.* Sur l'hypothénuse AB comme diamètre décrivons une demi-circonférence ; à partir du point A inscrivons-y comme corde le côté donné CD, joignons le point K au point B.

2e *Procédé.* Traçons un angle droit, sur l'un des côtés prenons une

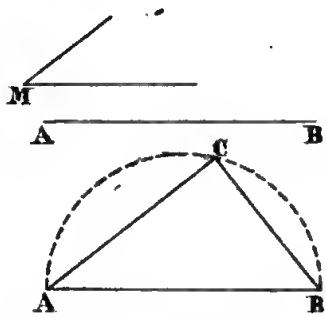
* Il résulte de là que deux triangles sont encore égaux lorsqu'ils ont deux côtés égaux et l'angle opposé à l'un d'eux égal et obtus.



longueur KA égale à CD, et du point A comme centre avec AB pour rayon, décrivons un arc de cercle qui coupera en B le côté indéfini KB; joignons A et B, et nous aurons le triangle demandé.

Il est évident que l'hypothénuse AB doit être donnée plus grande que le côté de l'angle droit.

Problème 19. — *Construire un triangle rectangle dont on donne l'hypothénuse et un angle aigu.*

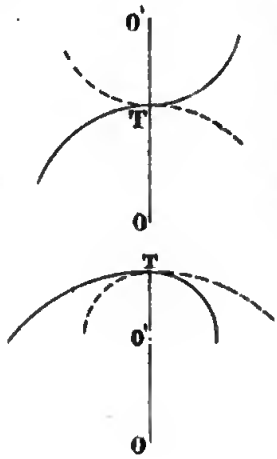


Sur l'hypothénuse AB décrivons une demi-circonférence, faisons en A un angle égal à l'angle donné M, et joignons le point C au point B.

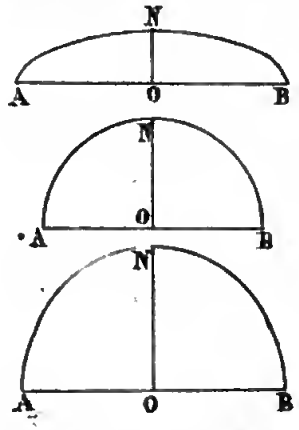
Pour un second procédé, voyez le même problème, dans les exercices du premier livre.

PROBLÈMES FONDÉS SUR LES RACCORDEMENTS DES CERCLES.

Deux arcs de cercle *se raccordent* ou sont *sans jarrets* lorsqu'ils appartiennent à des circonférences tangentes au point de raccordement. Si elles sont tangentes extérieurement, la courbe passe de la convexité à la concavité ou réciproquement, et le point de raccordement est dit: *point d'inflexion*. Si elles sont tangentes intérieurement, la courbe conserve la forme concave ou convexe. Dans les deux cas, on a vu que la ligne des centres passe par le point de contact.

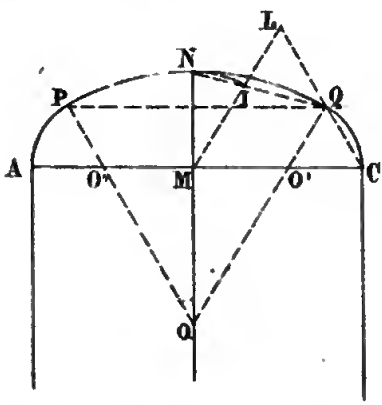


Problème 20. — *Tracer une anse de panier composée de trois arcs de cercle de 60°, connaissant la flèche et la ligne de naissance.*

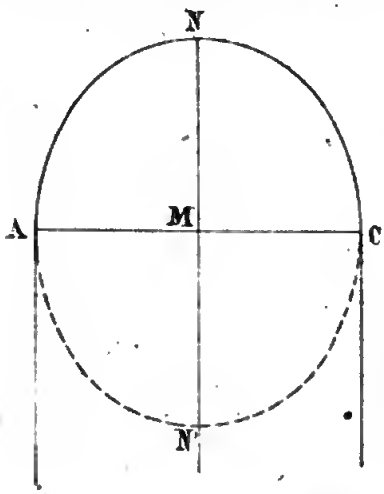


Nota. On appelle en général *anses de panier* des *cintres surbaissés* composés de plusieurs arcs de cercle qui se raccordent, et on dit qu'un cintre est surbaissé quand *sa flèche* NO est plus petite que la moitié de *la ligne de naissance* AB. Il est nommé *plein cintre* si elle lui est égale ; *cintre surhaussé* si elle est plus grande.

Analyse.— Supposons que AP, PQ et QC soient les trois arcs en question ; les deux extrêmes appartenant à des rayons égaux à cause de la symétrie de la figure ; celui du milieu PQ pouvant avoir un rayon différent. Sur la corde PQ comme base construisons un triangle équilatéral OPQ ; l'angle O résultant aura pour mesure 60°, ainsi que les deux autres P et Q. L'angle QO'C aura aussi pour mesure 60° comme alterne-interne avec l'angle PQO ; le point O' pourrait donc servir de centre à l'arc QC si O'Q égalait O'C. Or, si cela a lieu, le triangle O'QC est équilatéral. Cela posé, prolongeons CQ, et par le point M menons une parallèle à O'Q jusqu'à sa rencontre avec QC prolongé, le triangle MLC est encore équilatéral, et comme MC est donné, ce triangle est connu. Joignons le point N au point Q, et observons que ce point Q serait connu si le point I l'était. Or, QO = ON comme rayons du même arc, donc le triangle NOQ est isocèle et les angles N et Q sont égaux ; mais l'angle NQO est égal à NIM comme son correspondant ; donc NIM = MNI, et le triangle NMI est isocèle, par conséquent MI = MN.



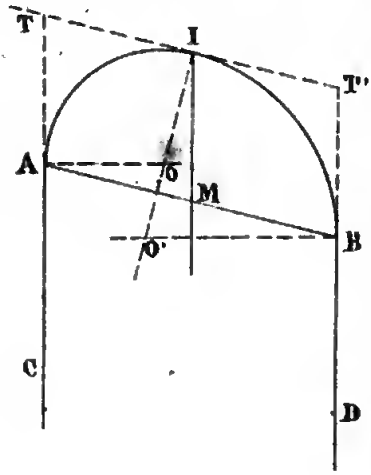
Synthèse. — Sur MC construisez un triangle équilatéral, prenez MI égal à la flèche MN, joignez les deux points N et I, prolongez jusqu'en Q ; par ce point menez à ML la parallèle OQ, et à AC la parallèle QP ; par le point O menez à QC la parallèle OP et les points O, O′, O″ seront les centres cherchés ; O′C, OQ et O″A seront les rayons.



Il est évident que cette courbe pourrait convenir aux cintres surhaussés dont on prendrait NN′ le double de la flèche pour ligne de naissance, et AM la demi-ligne de naissance pour flèche.

Nous observerons que l'anse de panier précédente est désagréable à l'œil lorsque la flèche MN est beaucoup plus petite que la demi-ligne de naissance, à cause des changements brusques de courbure dans les arcs de cercle. Plus tard nous étudierons une courbe plus convenable.

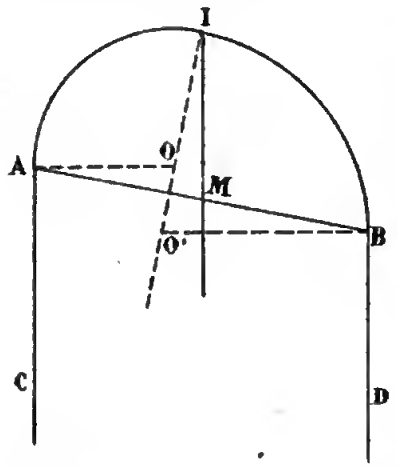
Problème 21. — *Tracer un arc rampant dont on connaît la ligne de naissance ; le raccordement des deux arcs de cercle dont il se compose devant se faire sur l'axe.*



Nota. Quand la ligne de naissance n'est pas perpendiculaire aux arêtes des jambages ou *piédroits*, le cintre porte le nom d'*arc rampant*.

Analyse. — Soit AIB la courbe en question, I le point de raccordement, O et O′ les centres des arcs AI, IB. Ces deux centres devront être sur la droite O′I ; les rayons de l'un seront AO, OI ; les rayons de l'autre, O′I, O′B. Menons les tangentes AT, BT′, ce

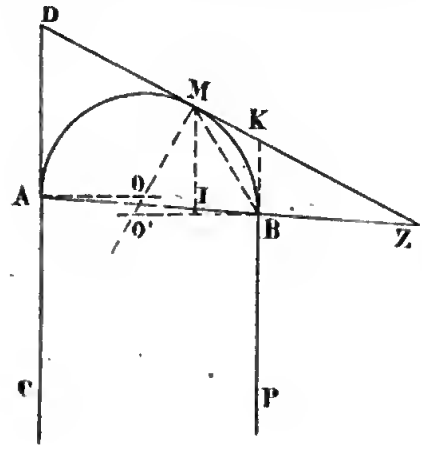
qui se fait en prolongeant les arêtes des piédroits ; menons aussi la tangente commune TT'. Nous devons avoir TA = TI comme tangentes partant du point T, de même T'I = T'B : d'ailleurs TI = T'I, puisque le point I se trouve sur l'axe ; donc AT = BT'. Ces deux droites étant parallèles et égales, la figure ATT'B est un parallélogramme, et la figure ATIM une losange. Ainsi MI est égal à la demi-ligne de naissance. IO' étant perpendiculaire à TT' le sera à AB.



Synthèse. — Prenez MI égal à AM ; abaissez du point I une perpendiculaire sur AB. En A élevez une perpendiculaire à l'arête AC, jusqu'à la rencontre de IO' ; O sera le centre de l'arc AI. En B même construction. O' sera le centre de l'arc BI.

On peut varier les données du problème d'un grand nombre de manières ; je donnerai pour second cas le suivant.

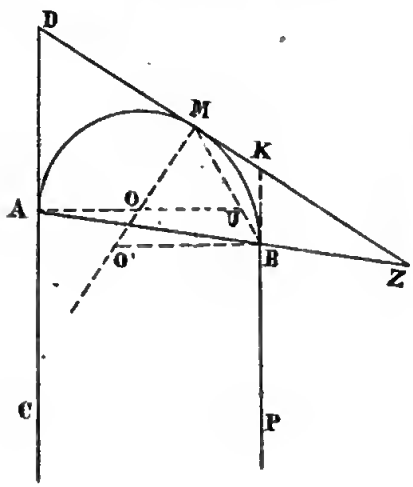
Problème 22. — *Tracer un arc rampant composé de deux arcs de cercle, connaissant la direction de la ligne de naissance* AZ, *la tangente commune* DZ *et l'un des piédroits* AC.



Analyse. — Soient AMB l'arc rampant, M le point de raccordement. Puisque DM et DA sont tangentes, elles sont égales, et comme je suppose que CD est l'arête du piédroit donné, la tangente DA est connue, le point M l'est aussi ; il reste à trouver l'arête PK ; elle est déterminée par la condition MK = BK ; or, en menant

la parallèle MI à DC, nous donnons lieu au triangle MIZ, et le problème est ramené à trouver sur l'un des côtés MZ un point tel que la parallèle KB, menée par ce point au côté MI, soit égale à MK (problème 5 du premier livre). La bissectrice MB de l'angle IMZ déterminera donc le point B, et par suite l'arête BK. Puis les perpendiculaires AO, BO', MO' donneront les centres et les rayons par leurs concours.

Synthèse. — Portez DA de D en M; par ce point menez la parallèle MI à DC, puis la bissectrice de l'angle IMK; par son point B de rencontre avec AZ menez la parallèle KP à DC. Aux points A et B élevez des perpendiculaires aux arêtes des piédroits, en M élevez-en une à la tangente commune, les points de rencontre O et O' donneront les centres; OA et O'B seront les rayons.

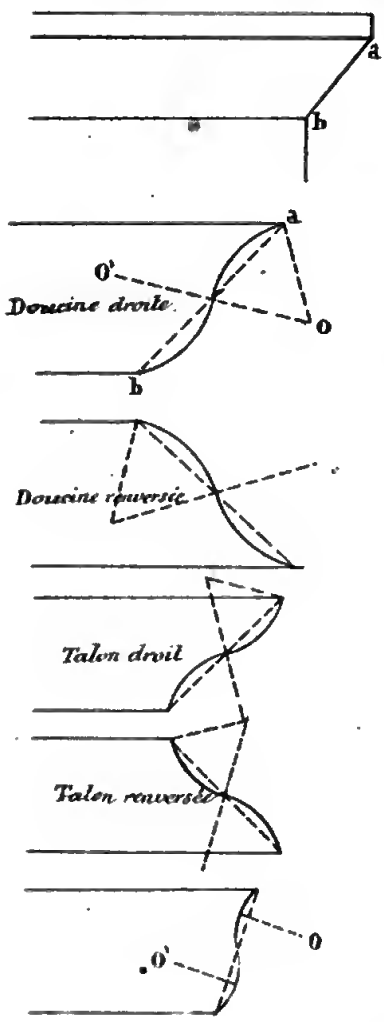


Si dans l'analyse précédente nous avions cherché le point B par la considération de MO' = O'B au lieu de MK = KB; nous aurions conclu que le triangle MO'B est isocèle, et qu'en menant par le point O la parallèle OU, nous donnions lieu au triangle MOU qui l'est aussi comme ayant l'angle OUM égal à O'BM, et l'angle M commun avec le précédent, et comme les angles O'MB et MBO' sont égaux, les angles OMU et MUO le sont aussi. Donc OU = OM, mais OM est connu, OU l'est donc, par suite la droite MB l'est elle-même, et sa rencontre avec AZ donne le point B. Nous déduisons de là la construction suivante donnée par l'architecte Rondelet.

Synthèse. — Portez AD sur DZ; élevez en A et en M les perpendiculaires AO, MO; le point de rencontre O sera le

centre du premier arc et AO son rayon ; prolongez AO d'une longueur OU égale à OM ; joignez M et U, prolongez jusqu'à la rencontre de AZ. Le point B sera l'extrémité de la ligne de naissance et le reste se fera comme précédemment*.

DE QUELQUES MOULURES D'ARCHITECTURE.



La *doucine* a pour objet de rendre plus agréable à l'œil le profil de la corniche à *chanfrein*. A cet effet on substitue à la droite *ab* deux arcs de cercle égaux, l'un concave et l'autre convexe, qui se raccordent. Si *ab* est incliné à 45°, l'usage est de faire ces arcs de 60°. On prend alors la moitié de *ab* sur laquelle on construit un triangle équilatéral. Le sommet opposé sert de centre et l'un des côtés sert de rayon ; on prolonge ce rayon d'une grandeur égale et on obtient ainsi le centre et le rayon du deuxième arc.

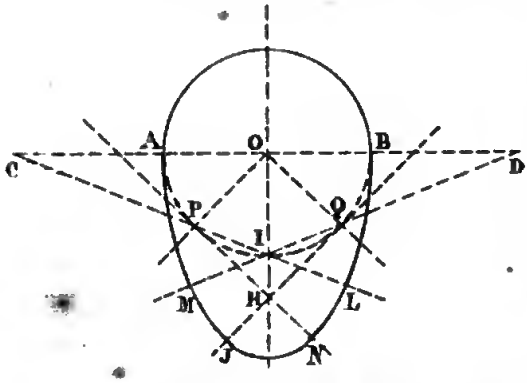
Le *talon* n'est autre qu'une doucine dont l'arc concave est remplacé par l'arc convexe, et réciproquement.

Les doucines faites sur des droites dont l'inclinaison est différente de 45° se composent aussi de deux arcs égaux et de même rayon. Alors c'est le goût qui sert à fixer la grandeur de ce dernier.

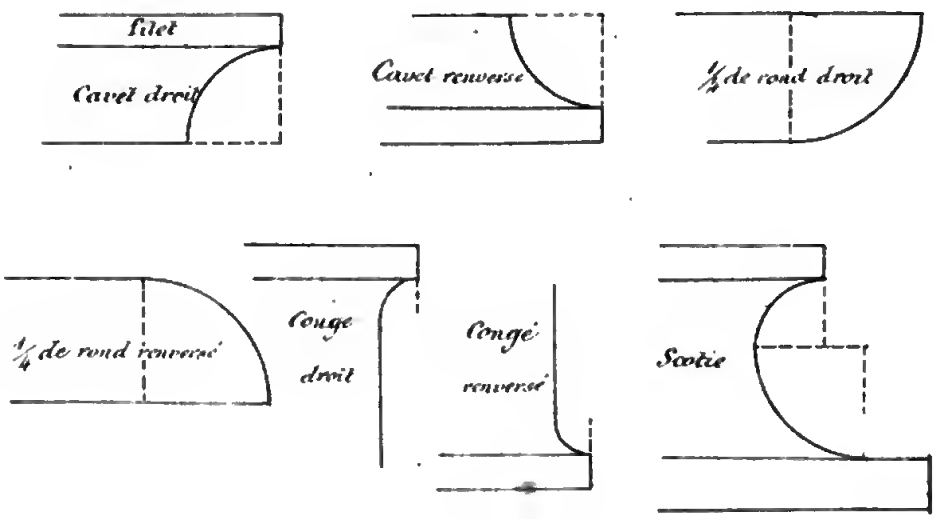
* Application aux cintres destinés à soutenir un limon d'escalier. — Voyez Rondelet, 4e volume, pour les autres cas et les épaisseurs à donner aux voussoirs et aux piédroits.

On élève donc sur le milieu de chaque moitié de *ab* des perpendiculaires sur lesquelles on prend les centres.

L'*ove* ou ornement en forme d'œuf s'obtient en décrivant sur sa largeur AB une circonférence. On prolonge ce diamètre de part et d'autre des trois quarts de sa longueur. Au centre du cercle on élève une perpendiculaire à AB ; on joint les extrémités C et D au point I ; puis de chacun de ces points comme centre avec CB et DA pour rayons, on décrit deux arcs de cercle qu'on limite aux sécantes CI et DI. Par les points P et Q on mène des tangentes au cercle, et de ces points comme centres avec PL et QM comme rayons, on décrit deux arcs de cercle qu'on limite aux tangentes en J et N. Enfin du point H avec HN ou HJ pour rayon, on décrit l'arc NJ qui ferme l'ove.

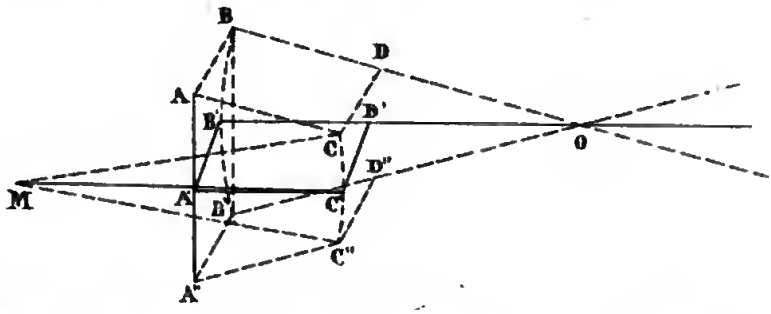


AUTRES MOULURES :



APPLICATION DU PROBLÈME 5 ET DU PARALLÉLOGRAMME.

Lorsqu'en mécanique on veut changer un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne de va et vient, ou réciproquement, on fait usage d'un balancier OB′ dont le mouvement fait parcourir l'arc BB″ à l'extrémité B′. Si le



rayon OB′ est très-grand comparativement à cet arc, celui-ci diffère peu de sa corde et le point B′ décrit un mouvement presque rectiligne. Mais si le rayon OB′ n'est pas suffisamment grand, l'arc BB″ ne peut plus être confondu avec sa corde. Dans ce cas le mécanicien Watt a imaginé d'adapter au balancier OB′ un parallélogramme A′B′C′D′ ayant des articulations en chaque sommet, et la course BB″ est remplacée par son égale AA″. Mais alors il faut forcer ce parallélogramme à avoir son sommet A′ sur la droite AA″ en A et en A″, dans les deux positions figurées. On y parvient au moyen du guide ou du contre-balancier MC′ qui maintient le sommet C′ à la même distance de son axe M.

Tracé. — Lorsqu'on s'est donné le balancier OB′, sa course BB″, on remplace celle-ci par une droite égale et parallèle à la corde BB″. Pour cela on ne limite pas d'abord cette parallèle voisine de BB″ et on se donne le parallélogramme A′B′C′D′. Du point B comme centre avec un rayon égal à A′B′ on décrit un arc de cercle qui coupe AA″, en A, par exemple : même opération du point B″. On achève chacun des parallélogrammes dont les côtés sont AB, A″B″ en les faisant égaux au parallélogramme A′B′C′D′. On cherche le

centre M du cercle qui passe par les trois points C, C′, C″ et MC′ est le contre-balancier.

De cette manière les trois points A, A′, A″ sont en ligne droite ; les points intermédiaires de la course n'y sont rigoureusement pas et décrivent une courbe en forme d'S appelée *lemniscate*, dont le point A′ est le point d'inflexion ; mais ils s'écartent peu de cette droite.

FIN DES PROBLÈMES ET APPLICATIONS DU DEUXIÈME LIVRE.

LIVRE TROISIÈME.

NOTA. Comme dans ce livre nous aurons souvent occasion de faire usage des racines quarrées et des propriétés des proportions, nous allons exposer succinctement ces deux théories.

Le *Quarré* d'un nombre est le produit de deux facteurs égaux à ce nombre.

Il s'indique par le chiffre 2 placé au-dessus du nombre et un peu à droite, et il s'effectue en multipliant le nombre par lui-même.

C'est ainsi que l'on a trouvé :

$1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$, $5^2=25$, $6^2=36$, $7^2=49$, $8^2=64$, $9^2=81$, etc.

Le quarré d'un produit s'effectue en élevant au quarré chacun des facteurs.

Ex. $(3\times4\times5)^2=3^2\times4^2\times5^2=9\times16\times25=3600$;
$(30)^2=3^2\times10^2=9\times100=900$.

Pour élever au quarré une fraction, on fait le quarré de chaque terme.

Ex. $\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{5^2}{6^2}=\frac{25}{36}$.

On appelle *racine* d'un nombre, un nombre qui multiplié par lui-même, reproduit le premier.

Elle s'indique par le signe $\sqrt{}$ sous lequel on écrit le nombre dont on veut extraire la racine. Ce signe se nomme *radical*.

Ainsi $\sqrt{1}=1$, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{16}=4$, $\sqrt{25}=5$, $\sqrt{36}=6$, $\sqrt{49}=7$, $\sqrt{64}=8$, $\sqrt{81}=9$.

Les racines des nombres compris entre 1 et 4 sont comprises entre 1 et 2; celles des nombres compris entre 4 et 9 sont comprises entre 2 et 3, etc.

Si la racine d'un nombre entier n'est pas entière, elle n'est pas non plus fractionnaire et elle est dite *incommensurable*.

EXTRACTION DES RACINES DES NOMBRES ENTIERS QUI ONT PLUS DE DEUX CHIFFRES.

Ex. $\sqrt{105625}$.

10.5 6.2 5	325	
1 5.6	62	645
3 2 2.5	2	5
0.		
	124	3225

On partage le nombre en tranches de deux chiffres, à partir de la droite. Puis à partir de la gauche, on extrait la plus grande racine entière de la première tranche, on l'écrit à droite du nombre proposé. Ici $\sqrt{10}$ est de 3. On élève cette racine au quarré et on le soustrait de cette première tranche; le quarré de 3 est de 9, et 9 de 10 il reste 1. A côté du reste on abaisse la tranche suivante 56, on sépare le dernier chiffre 6. On double la racine 3, et on écrit le résultat 6 au-dessous de la racine. On divise la partie 15 qui est à gauche de la virgule dans le reste 156 par ce double de la racine, 6. Le quotient 2 donne le second chiffre de la racine ou un chiffre trop fort. Pour essayer s'il n'est pas trop fort et pour avoir le nouveau reste, on place ce quotient à la droite du double 6 de la racine, et on multiplie le résultat 62 par ce même chiffre 2. On soustrait le produit 124 de tout le reste 156. Si la soustraction n'est pas possible, le chiffre 2 est trop fort et on le diminue d'une ou de plusieurs unités. Si elle est possible, ce qui a lieu dans le cas qui nous occupe; à côté du reste 32 on abaisse la tranche suivante 25, ce qui donne 3225 dont on sépare le dernier chiffre à droite. On double la racine 32,

ce qui donne 64, on écrit ce résultat à la droite du produit précédent. On divise la partie 322 à gauche de la virgule dans le reste 3225 par ce double 64. Le quotient 5 donne le troisième chiffre de la racine ou un chiffre trop fort. On l'essaie comme précédemment en l'écrivant à droite de 64, ce qui donne 645; en multipliant par ce même chiffre et soustrayant le produit 3225 du reste qui lui est égal dans ce cas. La racine est 325.

EXTRACTION DES RACINES DES NOMBRES ENTIERS PAR APPROXIMATION.

Nous avons vu que quand le nombre entier n'a pas pour racine un nombre entier, on ne peut pas obtenir celle-ci exactement. Mais on peut en approcher autant qu'on veut. On la cherche alors à 0,1, 0,01 ou 0,001 près; c'est-à-dire qu'on se propose d'avoir avec la partie entière les dixièmes, centièmes ou millièmes qui existent en sus de celle-ci dans la véritable racine. Alors on fait suivre le nombre proposé d'autant de fois deux zéros qu'on veut obtenir de décimales à la racine, on opère sur ce nouveau nombre comme précédemment, et on sépare à la droite de la racine le nombre de décimales qu'on s'est proposé de chercher.

Ex. $\sqrt{2}$ à 0,01,

20 00 0	1,41	
10,0	24	281
40,0	4	1
11 9	96	281

$\sqrt{3}$ à 0,001.

30 00 000	1,732		
20,0	27	343	3462
1 10,0	7	3	2
7 100			
176	189	1029	6924

EXTRACTION DES RACINES DES NOMBRES DÉCIMAUX.

Si le nombre est décimal et si le nombre des décimales est pair, on extrait la racine comme s'il était entier, et on sépare à sa droite la moitié du nombre des décimales.

Si le nombre des décimales est impair, on le rend pair en écrivant un zéro à sa droite. Cela n'en change pas la valeur.

S'il y a plus du double de décimales au nombre proposé

qu'on n'en veut à la racine, on n'en conserve que le double à partir de la virgule, et on néglige toutes les autres.

S'il y en a moins que le double, on complète par des zéros.

RACINES DES FRACTIONS.

Si les deux termes sont des quarrés, on extrait les racines des deux termes. Ex. $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$.

La racine d'une fraction est plus grande que cette fraction.

Si les deux termes ne sont pas des quarrés, on cherche alors la racine à 0,1 ; 0,01 ; 0,001, etc ; pour cela on divise le numérateur par le dénominateur, de manière à obtenir au quotient deux fois plus de décimales qu'on n'en veut à la racine.

Ex. $\sqrt{\frac{5}{6}}$ à $0,01=\sqrt{0,8333}=0,91$.

RACINES DES PRODUITS.

Souvent on extrait des racines de nombres assez compliqués, à la seule inspection, en se fondant sur le principe suivant :

On extrait la racine d'un produit en faisant le produit des racines de chaque facteur.

Ex. $\sqrt{900}=\sqrt{9\times100}=3\times10=30$.

$\sqrt{1600}=\sqrt{16\times100}=4\times10=40$.

$\sqrt{32}=\sqrt{16\times2}=4\sqrt{2}$.

Il résulte de ce même principe qu'un facteur hors d'un radical peut passer au-dessous, après avoir été élevé au quarré.

Ex. $4\sqrt{2}=\sqrt{16\times2}=\sqrt{32}$.

CALCUL DES FRACTIONS QUI CONTIENNENT DES RADICAUX.

Souvent on rencontre dans les calculs des fractions dont le dénominateur contient un facteur engagé sous un radical. Ex. $\frac{3}{\sqrt{2}}$. En le laissant subsister à cette place pour y substituer ensuite sa racine approchée, il serait moins facile d'apprécier le degré d'approximation que s'il était au numérateur. Pour l'y faire passer; on multiplie les deux termes par $\sqrt{2}$ et re-

marquant que $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$, on a : $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Ce n'est pas tout, en extrayant la racine de 2 à 0,01, et la multipliant par 3, on ferait trois fois une erreur moindre que 0,01, qui pourrait bien surpasser 0,01. Pour éviter cela, on fait rentrer sous le radical le facteur 3 après l'avoir élevé au quarré, et on a : $\frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{9 \times 2}}{2} = \frac{\sqrt{18}}{2}$. Extrayant la racine de 18 à 0,01 et divisant par 2, l'erreur sera moindre que 0,01.

DES PROPORTIONS.

On appelle *rapport géométrique* ou par qnotient, le résultat de la division de deux quantités de la même nature. Ce quotient est toujours un nombre abstrait, et c'est ce qui le distingue des quotients ordinaires qui sont des nombres concrets. Ex. Le rapport d'une longueur de 8 mètres à une longueur de 4 mètres, est $\frac{8}{4}$ ou 2. A l'inverse, le rapport de 4 mètres à 8 mètres est $\frac{4}{8}$ ou $\frac{1}{2}$.

Une *proportion géométrique* est l'égalité de deux rapports géométriques. Ex. $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ qu'on écrit aussi de la manière suivante : $3 : 4 :: 6 : 8$, et qu'on énonce : 3 est à 4 comme 6 est à 8.

Le premier rapport est celui qui précède le sigue $=$; le second celui qui le suit. *L'antécédent* du premier rapport est le numérateur ; *le conséquent* de ce même rapport est le dénominateur. Il en est de même du second. *Les moyens* d'une proportion sont le second et le troisième terme ; les deux autres sont les *extrêmes*.

Théorème 1. — *Dans toute proportion le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

Ex. $4 : 7 :: 8 : 14$. Je dis qu'on aura : $4 \times 14 = 7 \times 8$. En effet, mettons la proportion sous la forme : $\frac{4}{7} = \frac{8}{14}$. Réduisant au même dénominateur, nous aurons : $\frac{4 \times 14}{7 \times 14} = \frac{8 \times 7}{7 \times 14}$.

Ces deux fractions sont égales; les dénominateurs sont égaux; donc les numérateurs doivent l'être, et l'on aura :

$$4 \times 14 = 8 \times 7.$$

Théorème 2. — *Réciproquement si le produit de deux nombres est égal au produit de deux autres, on peut avec ces quatre nombres former une proportion ayant les deux premiers pour extrêmes et les deux autres pour moyens ou réciproquement.*

Soit $3 \times 12 = 9 \times 4$, on en déduira : $3 : 9 :: 4 : 12$. Divisons les deux membres de l'égalité $3 \times 12 = 9 \times 4$ par le produit 12×9, nous aurons : $\frac{3 \times 12}{12 \times 9} = \frac{9 \times 4}{12 \times 9}$, supprimons dans celle-ci le facteur commun 12 du premier membre et 9 du second, il vient : $\frac{3}{9} = \frac{4}{12}$ ou $3 : 9 :: 4 : 12$.

Il résulte de là qu'on peut faire dans une proportion tous les changements qui n'altèrent pas l'égalité du produit des extrêmes au produit des moyens. La proportion $4 : 7 :: 8 : 14$ peut donc recevoir les sept formes suivantes :

$$\begin{array}{l}
4 : 8 :: 7 : 14 \\
14 : 7 :: 8 : 4 \\
14 : 8 :: 7 : 4 \\
7 : 14 :: 4 : 8 \\
7 : 4 :: 14 : 8 \\
8 : 14 :: 4 : 7 \\
8 : 4 :: 14 : 7
\end{array}$$

Corollaire 1. — Dans toute proportion un moyen quelconque est égal au quotient du produit des extrêmes par le moyen connu.

Soit la proportion $4 : x :: 8 : 18$, x désignant le moyen inconnu. Faisons le produit des moyens égal au produit des extrêmes, il vient : $8x = 4 \times 18$. Divisons les deux membres par 8, nous aurons : $x = \frac{4 \times 18}{8} = 9$.

Corollaire 2. — On démontrerait de même que la valeur

d'un extrême est égale au quotient du produit des moyens par l'extrême connu.

Corollaire 3. — Une moyenne proportionnelle entre deux nombres est égale à la racine quarrée du produit de ces deux nombres.

On appelle *moyenne proportionnelle* entre deux nombres, une quantité qui occupe la place des moyens d'une proportion dont les deux autres forment les extrêmes. Ex. $4 : 8 :: 8 : 16$.

Soit la proportion $5 : x :: x : 20$. On en tire $x \times x$ ou $x^2 = 5 \times 20$. Extrayant la racine quarrée de part et d'autre, il vient : $x = \sqrt{5 \times 20} = 10$.

Théorème 3. — *On peut multiplier ou diviser par un même nombre les deux termes d'un rapport sans le changer.*

Car un rapport est exprimé par une fraction, et nous savons qu'on peut multiplier ou diviser les deux termes d'une fraction par un même nombre sans en changer la valeur.

Théorème 4. — *Dans toute proportion, la somme ou la différence des deux premiers termes est au second, comme la somme ou la différence des deux derniers est au quatrième.*

Ex. $4 : 9 :: 12 : 27$, je dis qu'on aura : $9 \pm 4 : 9 :: 27 \pm 12 : 27$. Pour le démontrer mettons la proportion proposée sous la forme $\frac{4}{9} = \frac{12}{27}$, ajoutons l'unité à chaque membre, nous aurons : $\frac{4}{9} + 1 = \frac{12}{27} + 1$. Réduisons l'unité en fraction, il viendra : $\frac{4+9}{9} = \frac{12+27}{27}$, ce qui démontre la première partie de l'énoncé. Pour la seconde, retranchons chaque fraction de l'unité, nous aurons : $1 - \frac{4}{9} = 1 - \frac{12}{27}$. Réduisons aussi l'unité en fraction, et il viendra : $\frac{9-4}{9} = \frac{27-12}{27}$. Si les deux rapports étaient plus grands que l'unité, il faudrait en retrancher l'unité.

Théorème 5. — *La somme ou la différence des deux premiers termes est au premier comme la somme ou la différence des deux derniers est au troisième.*

Ex. $4:9::12:27$, je dis qu'on aura : $9\pm4:4::27\pm12:12$. En effet, dans la proportion proposée mettons les moyens à la place des extrêmes et réciproquement, nous aurons : $9:4::27:12$, puis appliquons à cette proportion le théorème précédent, il viendra : $9\pm4:4::27\pm12:12$, ce qu'il fallait démontrer.

Théorème 6. — *Si deux proportions ont un rapport commun, les deux autres sont en proportion.*

Ex. $4:7::8:14$ et $16:28::8:14$, je dis qu'on aura : $4:7::16:28$.

En effet, mettons les deux proportions sous la forme : $\frac{4}{7}=\frac{8}{14}$, $\frac{16}{28}=\frac{8}{14}$. Les deux quantités $\frac{4}{7}$ et $\frac{16}{28}$ étant égales à $\frac{8}{14}$, sont égales entre elles, et donnent la proportion

$$\frac{4}{7}=\frac{16}{28} \text{ ou } 4:7::16:28.$$

Théorème 7. — *Si deux proportions ont les antécédents ou les conséquents égaux, on peut avec les quatre autres termes former une proportion.*

Ex. $2:5::6:15$ et $2:10::6:30$, je dis qu'on aura : $5:10::15:30$.

En effet, dans les deux proportions proposées changeons les moyens de place, nous aurons : $2:6::5:15$ et $2:6::10:30$, ces deux proportions ont un rapport commun et les deux autres rapports donnent : $5:15::10:30$, proportion dans laquelle on peut de nouveau changer les moyens de place pour avoir : $5:10::15:30$.

Même démonstration dans le cas des conséquents égaux.

Théorème 8. — *Si deux proportions ont trois termes égaux les quatrièmes le sont.*

Car si on tire la valeur de chacun de ces quatrièmes termes, on la trouve la même dans les deux proportions.

Théorème 9. — *Lorsque deux proportions ont les extrêmes égaux, les moyens forment une proportion pourvu qu'on prenne les deux termes de l'une pour les moyens de la nouvelle, et les deux termes de l'autre pour les extrêmes ou réciproquement.*

Ex. $2:6::8:24$ et $2:12::4:24$, je dis qu'on aura : $6:12::4:8$.

En effet, des deux proportions proposées on tire : $2\times24=6\times8$ et $2\times24=12\times4$, d'où $6\times8=12\times4$ ce qui donne la proportion $6:12::4:8$.

Théorème 10. — *Les produits termes à termes de plusieurs proportions sont en proportion.*

Ex. $2:5::6:15$ et $4:7::8:14$, je dis qu'on aura : $2\times4:5\times7::6\times8:15\times14$.

En effet, mettons les deux proportions sous forme d'égalités, nous aurons : $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$ et $\frac{4}{7}=\frac{8}{14}$, multipliant ces deux égalités membre par membre, il vient :

$$\frac{2\times4}{5\times7}=\frac{6\times8}{15\times14} \text{ ou } 2\times4:5\times7::6\times8:15\times14.$$

S'il y avait plus de proportions, la marche à suivre serait la même.

Théorème 11. — *Dans deux proportions les quotients terme à terme sont en proportion.*

Ex. $2:5::6:15$ et $4:7::8:14$, je dis qu'on aura : $\frac{2}{4}:\frac{5}{7}::\frac{6}{8}:\frac{15}{14}$.

En effet, mettons les deux proportions sous forme d'égalités,

nous aurons : $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$ et $\frac{4}{7}=\frac{8}{14}$. Divisant ces deux égalités membre par membre, il vient : $\frac{2\times 7}{5\times 4}=\frac{6\times 14}{15\times 8}$, ou bien changeant l'ordre des facteurs du dénominateur : $\frac{2\times 7}{4\times 5}=\frac{6\times 14}{8\times 15}$, ou bien $\frac{2}{4}:\frac{5}{7}=\frac{6}{8}:\frac{15}{14}$, ou enfin $\frac{2}{4}:\frac{5}{7}::\frac{6}{8}:\frac{15}{14}$.

Théorème 12. — *Les mêmes puissances d'une proportion sont en proportion.*

Nota. On appelle *puissance* d'un nombre, le produit d'autant de facteurs égaux à ce dernier qu'il y a d'unités dans l'indice de cette puissance. On l'indique par le chiffre de l'indice, placé au-dessus du nombre et un peu à droite. Ex. $4^5=4\times 4\times 4\times 4\times 4$.

Soit la proportion $2:7::8:28$, je dis qu'on aura : $2^4:7^4::8^4:28^4$.

En effet, mettons la proportion proposée sous la forme : $\frac{2}{7}=\frac{8}{28}$. Elevons à la quatrième puissance les deux membres de cette égalité, nous aurons : $\frac{2^4}{7^4}=\frac{8^4}{28^4}$ ou $2^4:7^4::8^4:28^4$.

Théorème 13. — *Les mêmes racines des termes d'une proportion sont en proportion.*

Nota. On appelle *racine quatrième, cinquième*, d'un nombre, le nombre qui, élevé à la puissance quatrième, cinquième, reproduit le nombre proposé. On l'indique par le signe $\sqrt{}$ dans l'ouverture duquel se met l'indice de la racine, et au-dessous duquel se place le nombre dont on se propose d'extraire la racine. Ex. $\sqrt[5]{20}$.

Soit encore la proportion $2:7::8:28$, je dis qu'on aura : $\sqrt[5]{2}:\sqrt[5]{7}::\sqrt[5]{8}:\sqrt[5]{28}$.

Mettons la proportion sous la forme : $\frac{2}{7}=\frac{8}{28}$, et extrayons la racine cinquième des deux membres, nous aurons :

$$\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{7}}=\frac{\sqrt[5]{8}}{\sqrt[5]{28}} \text{ ou } \sqrt[5]{2}:\sqrt[5]{7}::\sqrt[5]{8}:\sqrt[5]{28}.$$

Théorème 14. — *Dans une suite de rapports égaux, on peut dire : la somme des antécédents est à la somme des conséquents comme un antécédent est à son conséquent.*

Ex. $3:4::6:8::12:16::24:32$, je dis qu'on aura : $3+6+12+24:4+8+16+32::3:4$.

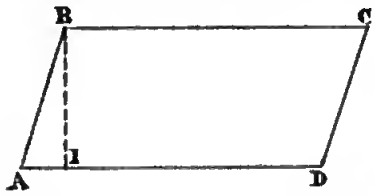
En effet, considérons les quatre premiers termes ; changeons les moyens de place et appliquons-leur le théorème 4, nous aurons : $3:6::4:8$, d'où $3+6:6::4+8:8$, ou bien $3+6:4+8::6:8$; remplaçons le rapport $6:8$ par son égal $12:16$, il viendra : $3+6:4+8::12:16$; changeons encore les moyens de place et appliquons le théorème 4, il viendra : $3+6:12::4+8:16$, d'où $3+6+12:12::4+8+16:16$, ou bien enfin $3+6+12:4+8+16::12:16$; remplaçant le rapport $12:16$ par son égal $24:32$, et raisonnant comme précédemment, on arrivera à la conclusion.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

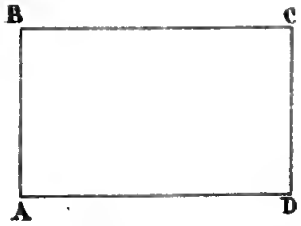
La surface ou *l'aire* d'une figure géométrique est l'étendue en longueur et largeur, limitée par son contour.

Deux figures sont dites *équivalentes* lorsque, sans être égales, elles ont la même surface.

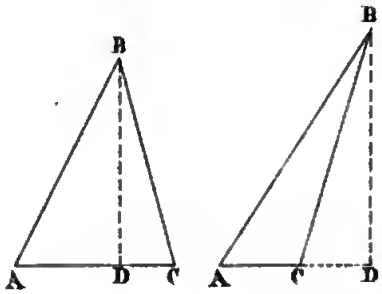
Deux figures égales sont donc toujours équivalentes. La réciproque n'est pas toujours vraie.



On appelle *base* d'un parallélogramme l'un quelconque des côtés, AD par exemple, et *hauteur* la distance de son opposé à celui-ci, mesurée par la perpendiculaire BI.



Il résulte de là que dans le rectangle l'un quelconque des côtés, AD par exemple, étant pris pour base, son adjacent AB est la hauteur. Ces deux côtés s'appellent aussi *les dimensions* du rectangle.

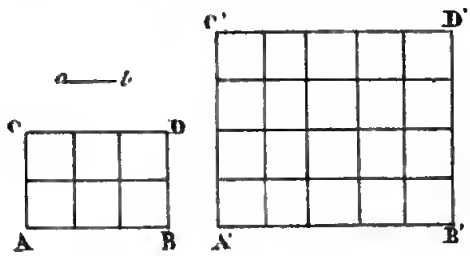


Le carré a les mêmes dimensions en tous sens.

Dans le triangle on peut aussi prendre un des côtés quelconque AC pour base ; la hauteur est alors la perpendiculaire BD abaissée sur la base AC prolongée s'il est nécessaire.

Théorème 1.— *Deux rectangles qui n'ont pas les mêmes dimensions ont des surfaces proportionnelles aux produits de ces dimensions.*

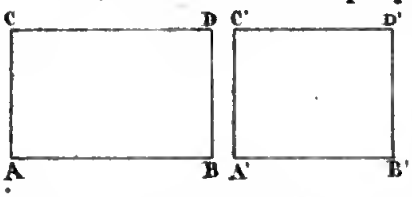
En effet, cherchons la plus grande commune mesure, s'il y en a une, entre les deux dimensions AB, BD et les deux autres A'B', B'D'. Soit *ab* cette commune mesure, portons-la sur chacune de ces quatre droites, et par les points de division, menons des parallèles aux côtés du rectangle, nous obtiendrons des carrés égaux dans les deux figures. La première en aura deux tranches de trois, c'est-à-dire six ; la seconde quatre tranches de cinq, c'est-à-dire vingt. On aura donc ABDC : A'B'D'C' :: 3×2 : à 5 × 4. Dans cette proportion, remplaçons les nombres 3, 2, 5, 4 par les longueurs qu'ils représentent, nous aurons : ABDC : A'B'D'C' :: AB × AC : A'B' × A'C'.



S'il n'y avait pas de commune mesure entre les quatre droites, on porterait sur chacune d'elles une unité de longueur assez

petite pour que le reste puisse être négligé, et en opérant comme précédemment, on arriverait à la même conclusion.

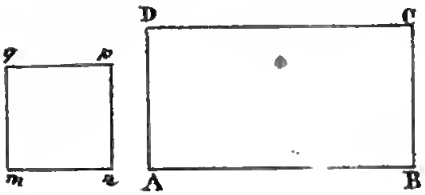
Corollaire. — Deux rectangles qui ont une dimension commune, ont des surfaces proportionnelles aux deux autres.



Ex. Soient les deux rectangles ABDC, A'B'D'C' qui ont les deux dimensions AC, A'C' égales. Ils donneront, d'après le théorème précédent : ABDC : A'B'D'C' :: AB × AC : A'B' × A'C'. Comme AC = A'C' dans les deux termes du second rapport, on peut les diviser par ce facteur commun et on aura : ABDC : A'B'D'C' :: AB : A'B'.

Théorème 2. — *Un rectangle a pour mesure de sa surface le produit de sa base par sa hauteur.*

Mesurer une surface, c'est prendre son rapport avec une surface arbitraire prise pour unité. On est convenu d'adopter le carré construit sur l'unité de longueur. Nous aurons donc : ABCD : *mnpq* :: AB × BC : *mn* × *np*. Observons que *mnpq* étant le carré pris pour unité, sera un mètre carré si les côtés *mn* et *np* sont chacun de un mètre, la proportion deviendra donc : ABCD : $1^{m.q}$ :: AB × BC : 1 × 1, d'où



$$ABCD = \frac{AB \times BC}{1 \times 1} \times 1^{m.q} = AB \times BC^{m.q}.$$

Il est important de reconnaître que ce produit représente des carrés d'un mètre de côté : car le rapport $\frac{AB \times BC}{1 \times 1}$ est un nombre abstrait et son produit par $1^{m.q}$ donne des unités de la nature du multiplicande $1^{m.q}$. Ainsi le produit exprime toujours des carrés qui ont pour côté l'unité de longueur qui a servi à mesurer les dimensions du rectangle. Si par exemple le pied a servi d'unité de longueur, le produit représentera des pieds carrés.

Corollaire. — La surface d'un carré est égale au quarré numérique de son côté. Car le carré a ses deux dimensions égales, et leur produit est un quarré arithmétique.

Application. — Un rectangle a pour dimensions : $12^m,25$ et $4^m,36$; quelle est sa surface ?

Le produit donne 53,4100 que nous énoncerons : 53 mètres carrés, 4100 dix-millièmes de mètre carré. Pour certaines applications du mesurage des surfaces, il faut quelquefois convertir une surface telle que celle-ci en décimètres, centimètres ou millimètres carrés.

Etablissons d'abord que, si dans les longueurs le décimètre ou dixième du mètre, centimètre ou centième du mètre, millimètre ou millième du mètre, sont des expressions de même sens, il n'en est pas de même dans les surfaces. Pour s'en convaincre, il suffit de suivre la formation du tableau suivant :

1 mètre en longueur vaut 10 décimètres ;
donc 1 mètre carré vaut..... 100 décimètres carrés.
1 mètre en longueur vaut 100 centimètres ;
donc 1 mètre carré vaut..... 10000 centimètres carrés.
1 mètre en longueur vaut 1000 millimètres ;
donc 1 mètre carré vaut..... 1 000 000 millimètres carrés.

Réciproquement :

1 décimètre carré vaut $0^{m.q},01$.
1 centimètre carré vaut $0^{m.q},0001$.
1 millimètre carré vaut $0^{m.q},000001$.

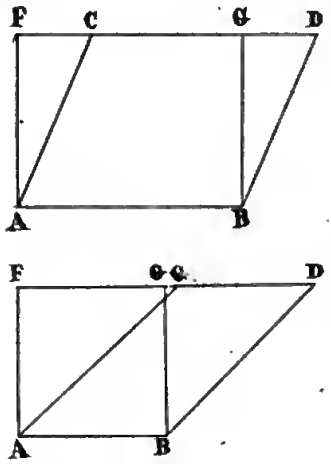
Par conséquent, autant il y aura de centièmes dans le nombre proposé, autant il y aura de décimètres carrés. Autant il y aura de dix-millièmes, autant il y aura de centimètres carrés. Enfin autant il y aura de millionièmes, autant nous aurons de millimètres carrés. Or, pour réduire un nombre en centièmes, millièmes, millionièmes, il faut reculer la virgule de deux en deux rangs vers la droite s'il est décimal, on écrire deux, quatre, six zéros à la droite du nombre s'il est entier. Nous concluons donc que :

Pour convertir un nombre décimal de mètres carrés en

décimètres carrés, il faut reculer la virgule de deux rangs vers la droite ; de quatre rangs pour des centimètres carrés ; de six rangs pour des millimètres carrés. Si le nombre est entier, il faut écrire deux zéros à sa droite, pour avoir des décimètres ; quatre pour des centimètres ; six pour des millimètres *.

Théorème 2. — *Un parallélogramme a pour mesure de sa surface le produit de sa base par sa hauteur.*

La proposition sera évidemment démontrée si je prouve que le parallélogramme ABDC est équivalent au rectangle ABGF.



A cet effet, observons que si de la figure totale ABDF, nous retranchons 1° le triangle AFC, il reste le parallélogramme ABDC ; 2° le triangle GBD, il reste le rectangle ABGF. Si ces deux triangles sont égaux, les restes sont évidemment équivalents. Or ils sont en effet égaux comme ayant l'hypoténuse égale, savoir : AC = BD comme côtés opposés d'un parallélogramme, et un côté de l'angle droit égal, savoir : AF = BG par la même raison.

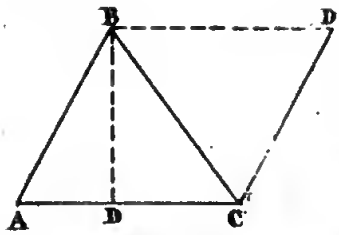
Corollaire 1. — Deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équivalents, puisqu'ils ont tous deux la même mesure.

Corollaire 2. — Deux parallélogrammes qui ont une dimension commune ou égale, ont des surfaces qui sont entre elles comme les deux autres dimensions.

Théorème 3. — *Un triangle a pour mesure de sa surface la moitié du produit de la base par la hauteur.*

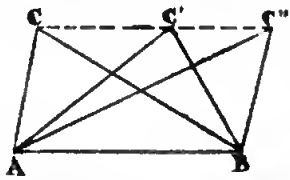
En effet, si par les points B et C je mène des parallèles aux

* Nous substitueronś désormais à la notation 2^{mq}, celle-ci : 2^{m^2}, pour désigner 2 mètres quarrés.



côtés AC, AB, la figure ABDC sera un parallélogramme composé de deux triangles égaux à ABC. Or, ce parallélogramme a pour mesure de sa surface le produit de sa base AC, qui est aussi celle du triangle par sa hauteur BD, qui est également commune au triangle. Donc le triangle ABC qui en est moitié aura pour mesure la moitié de ce produit.

Corollaire 1. — Les triangles de même base et de même hauteur sont équivalents, car ils ont même mesure.



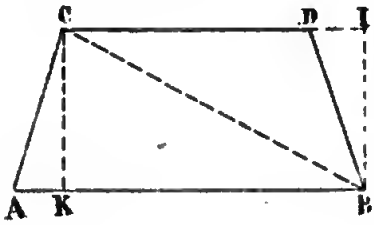
Ainsi les triangles ABC, ABC', ABC'' qui ont même base AB et leurs sommets sur une parallèle, sont tous équivalents.

Corollaire 2. — Deux triangles qui ont même base sont entre eux comme leurs hauteurs; et deux triangles qui ont même hauteur sont entre eux comme leurs bases. En effet cette propriété ayant lieu pour les parallélogrammes, aura lieu aussi pour les triangles qui en sont les moitiés.

THÉORÈME 4. — *Un trapèze a pour mesure de sa surface le produit de sa hauteur par la demi-somme des bases.*

Principe. — Lorsque, dans une somme de plusieurs nombres, il y a un facteur commun aux diverses parties de cette somme, au lieu de les ajouter on peut multiplier ce facteur par la somme de ceux qui l'accompagnent dans les diverses parties.

Ex. $5 \times 6 + 5 \times 12 = 5 \times (6 + 12)$. La parenthèse indique qu'il faut faire la somme de $6 + 12$ avant de multiplier par 5.

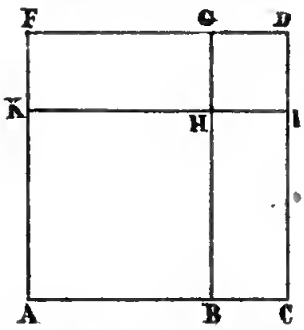


Ce principe posé, considérons le trapèze ABDC, et menons la diagonale CB. Le triangle ACB a pour mesure $\frac{AB \times CK}{2}$. Le triangle CBD a pour mesure (en prenant

CD pour base) $\frac{CD \times BI}{2}$, ou bien $\frac{CD \times CK}{2}$, à cause de $BI = CK$. Or la somme de ces deux surfaces donne celle du trapèze; ajoutons-les donc en remarquant que CK est facteur commun, nous aurons : $CK \times \left(\frac{AB}{2} + \frac{CD}{2}\right)$, ou $CK \times \left(\frac{AB + CD}{2}\right)$.

Nous avons vu à la fin du premier livre que la parallèle menée aux deux bases par le milieu de l'un des deux autres côtés était égale à la demi-somme de celles-ci. On peut donc aussi dire que *le trapèze a pour mesure de sa surface, la hauteur multipliée par la parallèle aux deux bases, menée par le milieu de l'un des deux autres côtés.*

Théorème 5. — *Le carré fait sur la somme de deux droites est égal au carré fait sur la première, plus le carré fait sur la seconde, plus les deux rectangles ayant pour dimensions communes ces deux droites.*

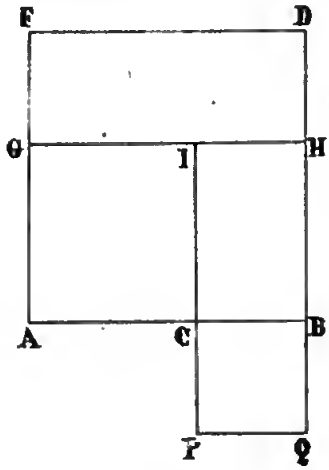


Soient AB et BC les deux droites, AC leur somme; construisons un carré ACDF sur cette somme, et prenons sur AF la longueur AK égale à AB. Par les deux points B et K menons les deux parallèles BG, KI. La figure totale se composera 1° du carré ABHK fait sur AB; 2° de la figure HIDG qui est le carré construit sur BC à cause de $HI = BC$ et de $HG = FK = BC$; 3° des deux rectangles égaux FGHK et HICB qui ont les mêmes dimensions, savoir : $KH = HB$ comme côtés du même carré, et $GH = HI$ par la même raison*.

Théorème 6. — *Le carré fait sur la différence de deux droites est égal au carré fait sur la plus grande, plus le*

* Cette proposition se démontre algébriquement ainsi : a et b étant les deux lignes, on trouve : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

carré fait sur la plus petite, moins deux rectangles ayant ces deux droites pour dimensions.

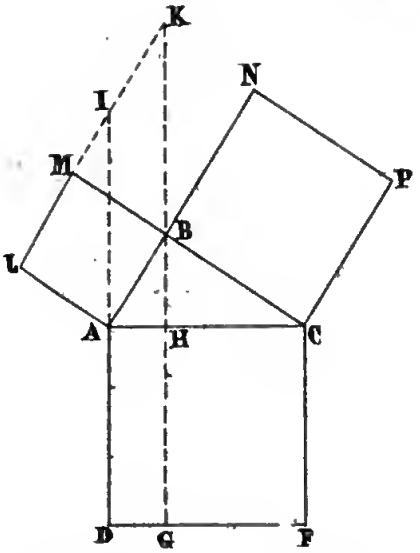


Soient AB la plus grande droite, CB la plus petite, AC leur différence. Formons le carré ACIG sur cette différence, puis le rectangle FDHG qui a pour base GH égale à la plus grande ligne, et pour hauteur HD égale à CB la plus petite. Enfin, formons également le rectangle IHQP des mêmes dimensions prises dans des sens perpendiculaires aux premières. La figure ABDF représentera le carré fait sur AB. Car AF = AB puisqu'elle se compose de la différence AC ou AG plus GF ou CB. Ce dont le rectangle IHQP dépasse ce carré, c'est-à-dire, la figure CBPQ représente le carré fait sur CB. Car on a pris IP = AB, et comme AC ou son égal IC est la différence, on aura : IP — IC = AB — AC ou CP = CB. On peut donc dire que la figure totale se compose de la somme des carrés faits sur la grande ligne et sur la petite. Si on en retranche les deux rectangles FDGH et IHQP, il restera évidemment le carré ACIG fait sur la différence *.

Théorème 7. — *Le carré fait sur l'hypothénuse d'un triangle rectangle a une surface équivalente à la somme des surfaces des carrés faits sur les deux autres côtés.*

Soit le triangle ABC rectangle en B, je dis qu'on aura : ACDF = ABML + BNPC. Pour le démontrer, prolongeons indéfiniment le côté LM ; prolongeons AD jusqu'à sa rencontre en I avec LM ; abaissons du point B une perpendiculaire sur AC et prolongeons-la au-dessus jusqu'en K, au-dessous jusqu'en G. Le rectangle AHDG, qui résulte de cette construc-

* Cette proposition se démontre aussi algébriquement : a et b étant les deux droites, on trouve : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.



tion, est équivalent au carré ABML. En effet, le triangle LAI est égal au triangle ABC comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux, savoir : AB=AL comme côtés du même carré, les angles L et B sont droits et l'angle LAI est égal à l'angle BAC comme ayant les côtés perpendiculaires. Donc l'hypothénuse AI est égale à l'hypothénuse AC ou au côté AD son égal. Donc le rectangle AHDG est équivalent au parallélogramme AIKB comme ayant les mêmes dimensions. Mais ce dernier est équivalent au carré LMBA, comme ayant même base AB et même hauteur ; donc en résumé le rectangle AHDG est équivalent au carré ABML. On démontrerait de même que le rectangle HCFG est équivalent au carré BNPC. La somme de ces deux rectangles, ou le carré ACDF sera donc équivalent à la somme des deux autres carrés.

Il résulte de là que le carré d'un des côtés de l'angle droit est égal à celui de l'hypothénuse moins celui de l'autre côté.

Applications. — Comme la surface d'un carré s'évalue numériquement par le quarré d'un côté qui s'indique ainsi : AB^2, les deux propriétés précédentes donnent lieu aux deux relations : $AC^2 = AB^2 + BC^2$, et $AB^2 = AC^2 - BC^2$.

A l'aide de ces deux relations, on peut déduire la valeur numérique d'un des côtés d'un triangle rectangle, quand on connaît les deux autres.

Si l'on connaît par exemple les deux côtés de l'angle droit, l'un de $4^m,25$ et l'autre de $5^m,30$, l'hypothénuse AC se déduira de la formule :

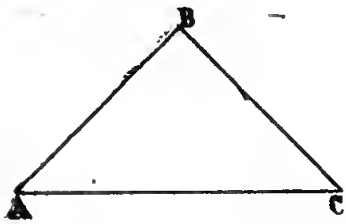
$$AC^2 = \overline{4,25}^2 + \overline{5,30}^2, \text{ ou bien } AC^2 = 46,1525 ;$$

d'où extrayant la racine de part et d'autre :

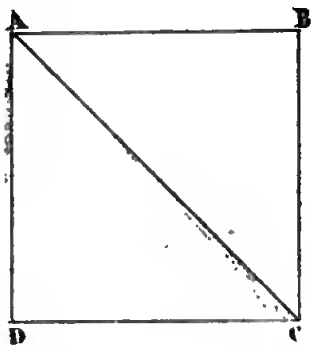
$$AC = \sqrt{46,1525} = 6,79.$$

Si l'on connaît l'hypothénuse $7^m,50$ par exemple, et l'un des côtés, $4^m,25$, la seconde relation donnera l'autre côté AB. On le déduira de la formule :

$$AB^2 = \overline{7,50}^2 - \overline{4,25}^2 = 38,1875, \text{ d'où } AB = \sqrt{38,1875} = 6^m,17.$$



Corollaire 1.— Si le triangle est rectangle et isocèle, la première relation $AC^2 = AB^2 + BC^2$ devient $AC^2 = 2AB^2$ à cause de $AB = BC$; c'est-à-dire que le quarré de l'hypothénuse est le double du quarré de l'un des côtés.



Cette propriété sert à prouver que : *le carré fait sur la diagonale d'un carré, est double de celui-ci.* Considérons en effet le carré ABCD avec sa diagonale AC. L'une des moitiés de ce carré n'est autre qu'un triangle rectangle isocèle, qui donne comme précédemment $AC^2 = 2AB^2$. Or AB^2 représente le carré ABCD et AC^2 celui de la diagonale. Donc, etc.

Applications. — Il résulte de là que quand on connaît le côté d'un carré, on peut en déduire la valeur numérique de sa diagonale et réciproquement.

La relation $AC^2 = 2AB^2$ donne en effet $AC = \sqrt{2AB^2}$. Pour la réciproque on divise les deux membres par 2, et il vient $\frac{AC^2}{2} = AB^2$ d'où $AB = \sqrt{\frac{AC^2}{2}}$.

Ex. Le côté d'un carré est de $18^m,25$; que vaut sa diagonale ?

En la désignant par AC, nous aurons :

$$AC = \sqrt{2 \times \overline{18,25}^2} = \sqrt{666,1250} = 25,80.$$

La diagonale d'un carré est $20^m,50$; quel est le côté du carré?

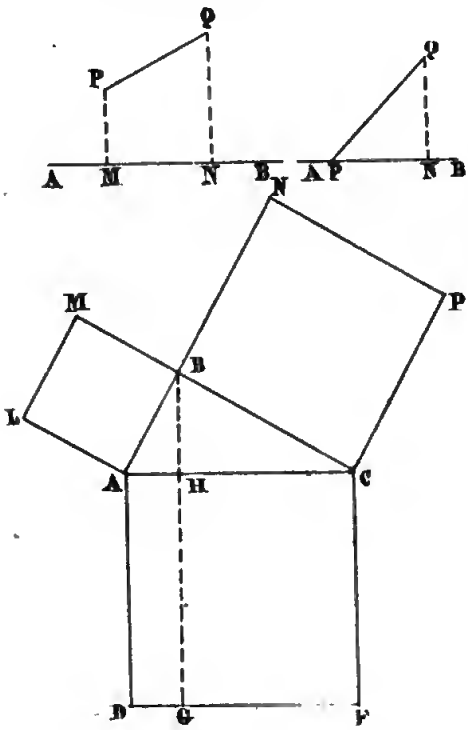
En le désignant par AB, nous aurons :

$$AB = \sqrt{\frac{\overline{20,50}^2}{2}} = \sqrt{\frac{420,2500}{2}} = \sqrt{210,1250} = 14,49.$$

De la relation $AC^2 = 2AB^2$ on tire : $\frac{AC^2}{AB^2} = 2$ ou $\frac{AC}{AB} = \sqrt{2}$.

Comme $\sqrt{2}$ est un nombre incommensurable, on conclut que le rapport de la diagonale au côté du carré est incommensurable.

Corollaire 2. — Dans un triangle rectangle, le quarré de chaque côté de l'angle droit est au quarré de l'hypothénuse comme la projection de ce côté sur l'hypothénuse est à l'hypothénuse entière.



Nota. On appelle *projection* d'une droite limitée PQ sur une autre AB, la distance MN des pieds des perpendiculaires abaissées des extrémités P et Q sur AB. Si l'une des extrémités de PQ est sur AB, la droite PN devient la projection.

Je dis donc qu'on aura : $AB^2 : AC^2 :: AH : AC$. Car le carré ACFD et le rectangle AHGD ont même hauteur HG, donc ils sont entre eux comme leurs bases. On aura donc : AHGD : ACFD :: AH : AC. Remplaçant le rectangle AHGD par le carré ABML ou AB^2 et ACFD par AC^2, la proportion deviendra : $AB^2 : AC^2 :: AH : AC$.

On démontrerait de même qu'on aura : $BC^2 : AC^2 :: HC : AC$.

Application. — Au moyen de cette propriété on peut

connaître la projection d'un côté sur l'hypothénuse quand on connaît le côté et l'hypothénuse.

Ex. Un triangle rectangle a pour hypothénuse 5^m, et pour l'un des côtés de l'angle droit 4^m ; on demande la projection de ce côté sur l'hypothénuse.

On aura évidemment :

$$4^2 : 5^2 :: x : 5, \text{ d'où } x = \frac{4^2 \times 5}{5^2} = \frac{4^2}{5} = \frac{16}{5} = 5^m,2.$$

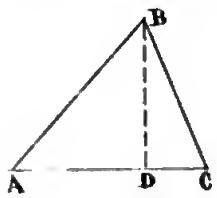
Corollaire 3. — Les deux carrés des côtés de l'angle droit sont entre eux comme leurs projections sur l'hypothénuse.

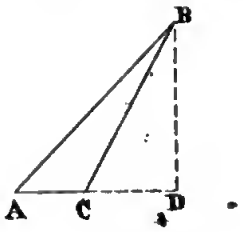
Car les deux rectangles AHGD et HCFG ont même hauteur HG et donneront la proportion : AHGD : HCFG :: AH : HC. Remplaçant ces rectangles par les carrés équivalents, il vient : $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: AH : HC$.

Corollaire 4. — Chacun des côtés de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypothénuse et sa projection.

Car de ce que le carré ABML soit équivalent au rectangle AHGD, ce qui s'exprime ainsi : $AB^2 = AD \times AH$ ou $AC \times AH$, à cause de $AD = AC$; on déduit, en considérant AB^2 comme un produit de moyens et $AC \times AH$ comme un produit d'extrêmes : $AC : AB :: AB : AH$. On démontrerait de même qu'on a : $AC : BC :: BC : CH$.

Théorème 8. — *Le carré du côté opposé à l'angle aigu d'un triangle, est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins le double rectangle qui aurait pour dimensions l'un des côtés qui comprennent l'angle aigu et la projection de l'autre sur ce dernier.*





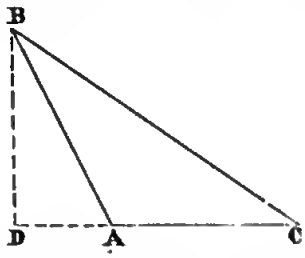
Soit A l'angle aigu du triangle ABC, je dis qu'on aura :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \times AD.$$

En effet, le triangle rectangle BDC nous donne : $BC^2 = BD^2 + DC^2$. D'un autre côté, le triangle ABD nous donne : $BD^2 = AB^2 - AD^2$. De plus, $DC = AC - AD$

pour la fig. 1 ; et $DC = AD - AC$ pour la fig. 2 ; donc, d'après le théorème 6, $DC^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \times AD$. Remplaçons dans la première égalité BD^2 et DC^2 par leurs valeurs, nous aurons : $BC^2 = AB^2 - AD^2 + AC^2 + AD^2 - 2AC \times AD$. Supprimant $-AD^2$ et $+AD^2$ qui se détruisent, nous obtenons l'égalité ci-dessus : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \times AD$.

Théorème 9. — *Le carré du côté opposé à l'angle obtus d'un triangle, est égal à la somme des carrés des deux autres, plus deux fois le rectangle qui a pour dimensions l'un de ceux-ci et la projection de l'autre sur ce dernier.*



Soit A l'angle obtus du triangle ABC, je dis qu'on aura : $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \times AD$.

En effet, le triangle rectangle BDC nous donne : $BC^2 = BD^2 + DC^2$. Remplaçons BD^2 et DC^2 par leurs valeurs, et pour cela observons qu'à cause du triangle rectangle BDA nous avons : $BD^2 = BA^2 - AD^2$. Puis $DC = AD + AC$, et par conséquent, d'après le théorème 5, $DC^2 = AD^2 + AC^2 + 2DA \times AC$. La première égalité nous donnera donc, après cette substitution : $BC^2 = BA^2 - AD^2 + AD^2 + AC^2 + 2DA \times AC$. Supprimant $-AD^2$ et $+AD^2$ qui se détruisent, nous aurons :

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2AD \times AC^*.$$

Théorème 10. — *Réciproquement si dans un triangle le carré d'un des côtés est égal à la somme des carrés des deux autres, le triangle est rectangle.*

Car s'il ne l'était pas, l'angle opposé au côté dont le carré vaut la somme des deux autres serait aigu ou obtus, et, d'après les deux théorèmes précédents, le carré du côté

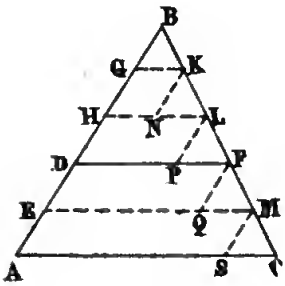
* Ces deux théorèmes nous seront utiles dans le cours de mécanique, pour passer du moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe qui passe par le centre de gravité au moment d'inertie de ce même corps par rapport à un axe parallèle au premier.

opposé serait plus petit ou plus grand que la somme des deux autres, ce qui est contre l'hypothèse.

Les réciproques des théorèmes 8 et 9 se démontrent d'une manière analogue.

PROPORTIONNALITÉ DES DROITES.

Théorème 11. — *Toute droite menée parallèlement à la base d'un triangle, divise les deux autres côtés en parties proportionnelles.*



Je dis qu'on aura, dans le triangle ABC : BD : DA :: BF : FC.

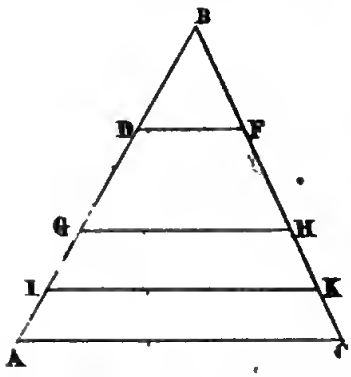
Pour le démontrer, cherchons la plus grande commune mesure entre BD et AD. Supposons-la contenue trois fois dans DB et deux fois dans AD. Par les points de division menons des parallèles à la base jusqu'à leurs points de rencontre avec BC. Les parties de droites interceptées sur BC seront toutes égales. Car si, par les nouveaux points de division, nous menons des parallèles à AB, nous obtiendrons une suite de petits triangles, tous égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun. On aura donc les deux proportions : BD : DA :: 3 : 2, BF : FC :: 3 : 2 ; ces deux proportions ont un rapport commun, les deux autres rapports donneront la proportion : BD : DA :: BF : FC ; ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire 1. — On démontrerait de même qu'on aura : BA : BC :: BD : BF et BA : BC :: AD : FC.

Si les deux droites BD et DA n'avaient pas de commune mesure, on partagerait l'une d'elles en un grand nombre de parties égales, et on porterait sur l'autre l'une des divisions qui serait nécessairement très-petite ; comme elle n'y serait pas contenue exactement, le reste serait négligé avec d'autant plus de raison qu'on pourrait le rendre aussi petit qu'on

voudrait. La démonstration se ferait alors comme précédemment.

Corollaire. 2. — Si dans un triangle on mène à la base tant de parallèles qu'on voudra, les deux autres côtés seront coupés en parties proportionnelles.



C'est-à-dire qu'on aura la suite de rapports égaux BD : BF :: DG : FH :: GI : HK :: IA : KC.

Car dans le triangle GBH, on a : BD : BF :: DG : FH :: BG : BH.

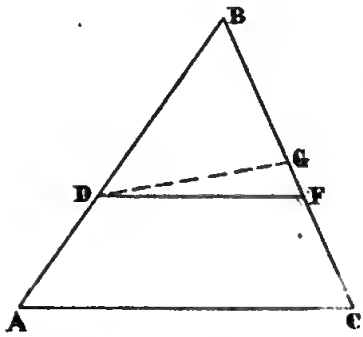
Dans le triangle BIK, on a : BG : BH :: GI : HK :: BI : BK.

Enfin dans le triangle BAC on a : BI : BK :: IA : KC.

Dans ces trois suites de rapports, les rapports extrêmes : BG : BH, BI : BK sont communs, donc ils sont tous égaux ; et supprimant les rapports communs, il vient :

BD : BF :: DG : FH :: GI : HK :: IA : KC.

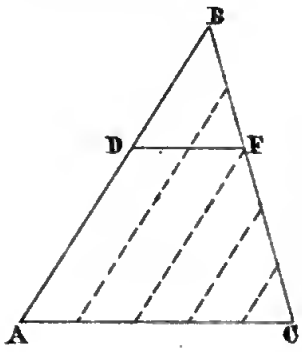
Théorème 12. — *Réciproquement si deux côtés d'un triangle sont coupés en parties proportionnelles, la droite qui joint les deux points de division, est parallèle au troisième côté.*



Si on a la proportion : BD : DA :: BF : FC, la droite DF est parallèle à AC. Car si cela n'avait pas lieu, on pourrait mener du point D une parallèle DG à AC ; alors, d'après la proposition directe, on aurait : BD : DA :: BG : GC. Cette proportion et celle de l'hypothèse ont un rapport commun : BD : DA ; donc les deux autres rapports formeront la proportion : BF : FC :: BG : GC, ou bien en changeant les moyens de place : BF : BG :: FC : GC.

Or, BF est plus grand que BG, il faudrait donc que FC fût plus grand que GC ; c'est le contraire qui a lieu. Donc on a eu tort de supposer que DF n'est pas parallèle à AC.

Théorème 13. — *Si dans un triangle on mène une parallèle à la base, cette base et sa parallèle seront proportionnelles aux distances de leurs extrémités au sommet opposé.*

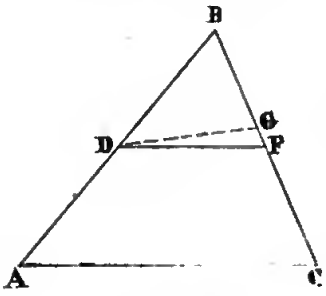


Ainsi, dans le triangle ABC, on aura : AC : DF :: BC : BF.

Pour le démontrer, cherchons encore la plus grande commune mesure entre BF et FC. Supposons-la contenue deux fois dans BF et trois fois dans FC. Nous aurons alors : BC : BF :: 5 : 2. Par les points de division menons des parallèles à BA, elles intercepteront sur DF et sur AC des divisions égales, savoir : deux sur DF et cinq sur AC, nous aurons donc la proportion : AC : DF :: 5 : 2. Cette proportion et la précédente ont un rapport commun : 5:2. Les deux autres donnent la proportion : BC : BF :: AC : DF.

Si les deux droites BF, FC n'avaient pas de commune mesure, on raisonnerait comme au théorème 11 *.

Théorème 14. — *Réciproquement si dans un triangle on mène une droite qui divise les deux côtés d'un triangle de telle sorte que le troisième côté et cette droite soient proportionnelles aux distances de leurs extrémités au sommet opposé, celle-ci est parallèle au troisième côté.*

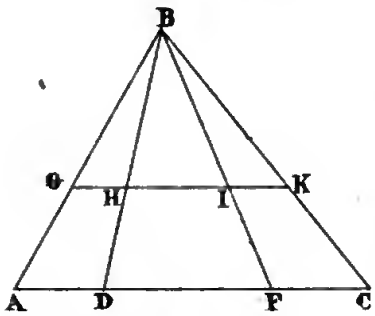


Si, dans le triangle ABC, on a : AC:DF::BC:BF::BA:BD, la droite DF est parallèle à AC. Car si cela n'avait

* Du compas de réduction.

pas lieu, on pourrait mener à AC la parallèle DG qui donnerait lieu à la proportion : AC : DG :: BC : BG :: BA : BD. Cette suite de rapports égaux a, avec la première, le rapport commun BA : BD ; donc les rapports qui précèdent celui-ci sont égaux, et on aura : BC : BF :: BC : BG. Les antécédents sont égaux, il faudrait donc que les conséquents le fussent ou que BF égalât BG, ce qui n'a pas lieu. Donc toute autre droite que DF n'est pas parallèle.

Théorème 15. — *Les lignes menées comme on voudra par le sommet d'un triangle, divisent le côté opposé et sa parallèle en parties proportionnelles.*



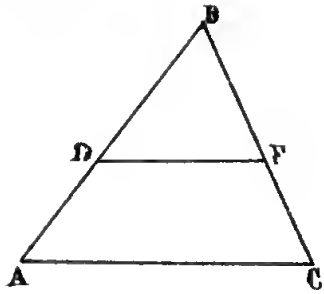
Je dis que dans le triangle ABC, on aura la suite de rapports égaux : GH : AD :: HI : DF :: IK : FC. En effet, dans le triangle ABD, on a évidemment : GH : AD :: BH : BD. Dans le triangle BDF on a aussi : BH : BD :: HI : DF :: BI : BF. Enfin le triangle BFC donne : BI : BF :: IK : FC. La première suite a, avec la deuxième, le rapport commun BH : BD ; la deuxième a, avec la troisième, le rapport commun BI : BF. Donc ces rapports sont tous égaux, et en omettant les rapports communs, il vient : GH : AD :: HI : DF :: IK : FC, ce qu'il fallait démontrer.

DE LA SIMILITUDE DES TRIANGLES ET DES POLYGONES.

Deux polygones sont *semblables* lorsqu'ils ont les angles égaux chacun à chacun et les côtés *homologues* proportionnels.

Les côtés homologues sont ceux qui ont la même position lorsque les deux polygones ont leurs côtés parallèles chacun à chacun.

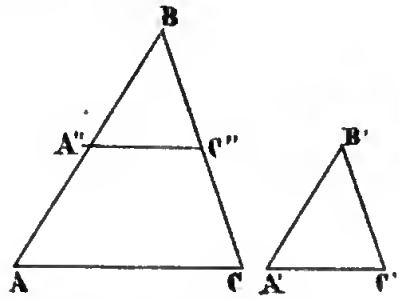
Théorème 16. — *Si dans un triangle on mène une parallèle*



à l'un des côtés, le petit triangle qui en résulte est semblable au grand.

Car le petit triangle BDF a l'angle B commun avec le grand ; les angles D, F sont égaux aux angles A, C comme correspondants. De plus, les côtés sont proportionnels en vertu des théorèmes 11 et 13.

Théorème 17.—*Deux triangles qui ont les angles égaux sont semblables.*



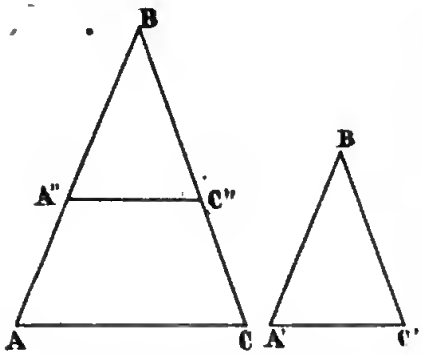
Pour le démontrer, prenons sur BA une longueur BA'' égale à B'A', et par le point A'' menons une parallèle à AC ; le triangle résultant A''BC'' sera semblable au grand ABC d'après le théorème précédent. Il reste à prouver qu'il est égal à A'B'C' ; or, il a avec celui-ci un côté égal adjacent à deux angles égaux, savoir : BA'' = B'A' par construction, B = B' par hypothèse, A'' = A comme correspondants, et comme A = A', il en résulte A'' = A'.

Corollaire 1. — Si deux triangles ont deux angles égaux, ils sont semblables. Car les troisièmes angles seront égaux comme supplémentaires de la somme des deux premiers.

Corollaire 2. — Deux triangles rectangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle aigu égal. Car avec les angles droits ils auront deux angles égaux.

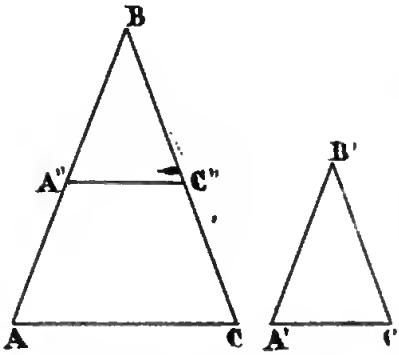
Corollaire 3. — Deux triangles isocèles sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal. Car si l'angle égal est l'un des deux angles à la base, ils auront deux angles égaux. Si l'angle égal est l'angle opposé à la base, chacun des deux autres vaudra la moitié du supplément de ce dernier ; ils seront donc égaux dans les deux triangles.

THÉORÈME 18. — *Deux triangles qui ont les côtés homologues proportionnels sont semblables.*



Même construction que précédemment, et il restera à prouver que le triangle A''BC'' est égal à A'B'C'. Or on a, par hypothèse, AB : A'B' :: BC : B'C' :: AC : A'C'. Les deux triangles ABC, A''BC'' donnent : AB : A''B :: BC : BC'' :: AC : A''C''. Comme A''B a été pris égal à A'B', ces deux suites de rapports ont un rapport commun, ils sont donc tous égaux ; de plus, les antécédents sont égaux, les conséquents doivent l'être. Donc BC'' = B'C' et A''C'' = A'C'. Donc les deux triangles en question sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun.

THÉORÈME 19. — *Deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels sont semblables.*



Si on a : B = B' et AB : A'B' :: BC : B'C', les deux triangles sont semblables. En effet, construisons comme précédemment le triangle A''BC'' ; et il restera encore à prouver qu'il est égal à A'B'C'. Or, la figure donne la proportion : AB : A''B :: BC : BC''. Comme A''B = A'B' par construction, cette proportion et la proportion donnée ont un rapport commun, les deux autres sont égaux, et comme les antécédents le sont, les conséquents le seront aussi : donc BC'' = B'C' ; d'ailleurs l'angle B est égal à l'angle B', donc ces deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, et ils sont égaux.

Théorème 20. — *Deux triangles qui ont leurs côtés parallèles ou perpendiculaires chacun à chacun sont semblables.*

Il suffit de prouver qu'ils ont deux angles égaux. A cet effet appelons A, B, C les trois angles de l'un, et A', B', C' les trois angles de l'autre, et rappelons-nous que les angles qui ont leurs côtés parallèles ou perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires. On ne pourra donc avoir que les combinaisons suivantes :

$A + A' = 180^\circ$	$A + A' = 180^\circ$	$A + A' = 180^\circ$	$A = A'$
$B + B' = 180$	$B + B' = 180$	$B = B'$	$B = B'$
$C + C' = 180$	$C = C'$	$C = C'$	$C = C'$

La première est inadmissible, car la somme des angles des deux triangles vaudrait plus de deux fois 180°. La seconde l'est également, car la somme de deux angles du premier et de deux angles du second vaut déjà deux fois 180°. Donc les angles C et C' seraient nuls. Dans la troisième, si $B=B'$ et $C=C'$, nous avons vu qu'il fallait qu'on ait: $A=A'$. C'est donc la quatrième combinaison qui est la seule admissible.

On reconnaîtra les angles égaux dans les deux triangles, en cherchant ceux dont les côtés sont perpendiculaires ou parallèles.

RÉSUMÉ.

Il y a cinq caractères de similitude des triangles.

Ils sont semblables :

1° Quand ils ont deux angles égaux ;

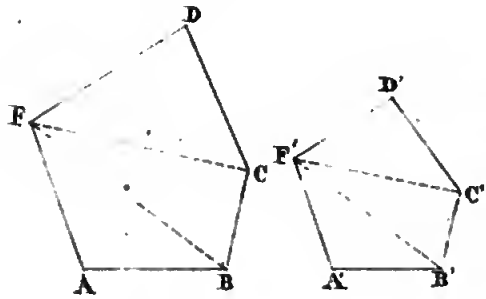
2° Quand ils ont les côtés homologues proportionnels ;

3° Quand ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels ;

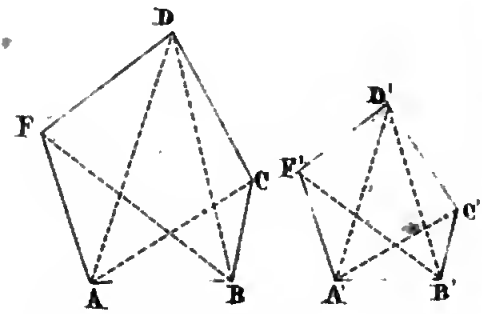
4° Quand ils ont les côtés parallèles ;

5° Quand ils ont les côtés perpendiculaires.

Théorème 21. — *Deux polygones semblables sont composés d'un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés.*



Pour le démontrer, joignons le sommet F et tous les autres, le sommet F' et tous les autres. Le triangle FDC est semblable au triangle F'D'C', comme ayant avec ce dernier un angle D = D' compris entre côtés homologues proportionnels à cause de la proportion : FD : F'D' :: DC : D'C' tirée de la définition des polygones semblables. Le triangle suivant FCB est semblable au triangle F'C'B' par la même raison. Car de la similitude des triangles FDC, F'D'C', nous concluons l'égalité des angles DCF, D'C'F', et comme par hypothèse l'angle DCB est égal à D'C'B', on aura évidemment DCB — DCF ou l'angle FCB égal à D'C'B' — D'C'F' ou F'C'B'. De la similitude des mêmes triangles, nous tirons la proportion : DC : D'C' :: FC : F'C', et de celle des polygones nous tirons : DC : D'C' :: BC : B'C'. Ces deux proportions ont un rapport commun et les deux autres donnent : FC : F'C' :: BC : B'C', ce qu'il fallait démontrer. On continuerait de même pour démontrer la similitude des autres. Ils sont semblablement disposés, puisque les triangles semblables ont été pris dans le même ordre dans les deux figures.

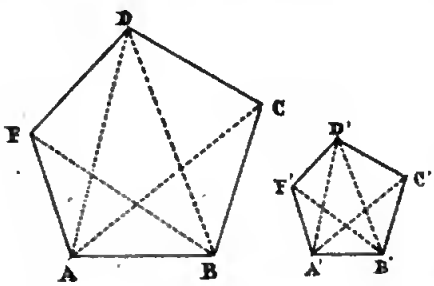


Les triangles AFB, A'F'B' ; ADB, A'D'B' ; BAC, B'A'C' qu'on obtient en joignant les extrémités d'un côté AB et de son homologue A'B' à tous les autres sommets, sont aussi semblables. Car d'après ce qui précède, les triangles qu'on obtient en joi-

gnant les sommets A et A' à tous les autres sont semblables; il en est de même de ceux qu'on obtient en joignant les sommets B et B' à tous les autres. Donc toutes ces diagonales sont proportionnelles aux côtés des polygones; et par conséquent les triangles dont nous voulons démontrer la similitude, ont les côtés homologues proportionnels et sont semblables *

THÉORÈME 22. — *Réciproquement si deux polygones sont composés d'un même nombre de triangles semblables et semblablement placés, ils sont semblables.*

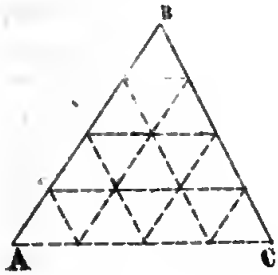
Car les angles seront égaux comme résultant de la somme des mêmes angles des triangles semblables, et les côtés homologues seront proportionnels comme formés des côtés homologues des triangles semblables.



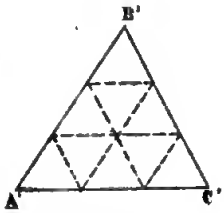
S'il est question du second mode de décomposition, nous ferons remarquer que si les triangles FAB, F'A'B'; ADB, A'D'B'; BRC, B'A'C' sont semblables, la similitude des triangles FAD, F'A'D'; DAC, D'A'C'; DAC, D'A'C', qu'on aurait par le premier mode de décomposition, s'en déduit. Car alors les diagonales homologues, qui sont les côtés de la première série de triangles, sont proportionnelles aux côtés AB, A'B', et par conséquent proportionnelles entre elles. Cela posé, les deux triangles FAD, F'A'D' seront semblables comme ayant un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, savoir: l'angle FAD égal à F'A'D' comme donnés par la différence des angles FAB et DAB, égaux aux angles F'A'B', D'A'B'. Puis on a la proportion FA : F'A' : : AD : A'D', à cause de la proportionnalité des côtés de la première série de triangles. Même démonstration pour les autres.

* Application de ce mode de décomposition au lever par intersections.

THÉORÈME 23. — *Deux triangles semblables ont leurs surfaces proportionnelles aux carrés des côtés homologues.*



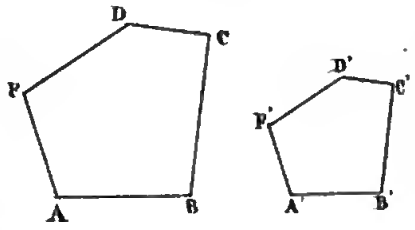
Principe d'arithmétique. — La somme des termes d'une suite naturelle de nombres impairs est égale au quarré du nombre des termes. Ex. $1+3+5=9$. Il y a 3 termes, le quarré de 3 est de 9.



Cherchons la plus grande commune mesure entre AB et A'B', et supposons-la contenue quatre fois dans AB et trois fois dans A'B'; par les points de division menons des parallèles aux deux autres côtés, et par les extrémités des parallèles à AC, A'C', menons-en d'autres à AB, A'B'. Les deux triangles ABC, A'B'C' seront décomposés en petits triangles égaux entre eux et semblables aux grands. Le triangle ABC contiendra quatre bandes dans chacune desquelles figure un nombre impair de triangles depuis un jusqu'à sept; et le triangle A'B'C', trois bandes, dont la dernière contient cinq triangles. D'après le principe précédent il y aura donc, dans le triangle ABC, 16 triangles partiels; et dans le triangle A'B'C', 9 triangles partiels. L'inspection de la figure le confirme. Nous aurons donc : Surf. ABC : surf. A'B'C' :: 16 : 9 ou bien :: 4^2 : 3^2 ou bien :: AB^2 : $A'B'^2$.

Si les deux côtés AB, A'B' sont incommensurables, la propriété n'en sera pas moins vraie.

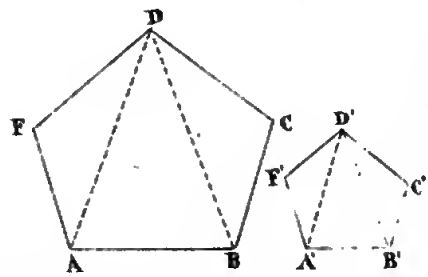
THÉORÈME 24. — *Les contours ou périmètres des polygones semblables sont entre eux comme les côtés homologues.*



Car si les polygones sont semblales, on aura la suite de rapports égaux : AB : A'B' :: BC : B'C' :: CD : C'D' :: DF : D'F' :: FA : F'A' dans laquelle

on peut dire : la somme des antécédents est à la somme des conséquents comme un antécédent est à son conséquent. Cela donne : $AB + BC + CD + DF + FA : A'B' + B'C' + C'D' + D'F' + F'A :: AB : A'B'$.

Théorème 25. — *Les surfaces de deux polygones semblables sont proportionnelles aux carrés des côtés homologues.*

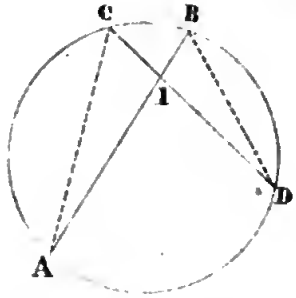


Car alors les triangles dans lesquels ils se décomposent lorsqu'on joint les sommets D et D' avec tous les autres sont semblables, et leurs surfaces sont proportionnelles aux carrés des côtés homologues. On aura donc : $AFD : A'F'D' :: AF^2 : A'F'^2$, $ABD : A'B'D' :: AB^2 : A'B'^2$, $BCD : B'C'D' :: BC^2 : B'C'^2$; les derniers rapports de ces trois proportions sont tous égaux à cause de la proportionnalité des côtés homologues des polygones, et par suite celle des carrés de ces côtés. Donc les premiers le sont, et on aura : $AFD : A'F'D' :: ABD : A'B'D' :: BCD : B'C'D'$. Dans cette suite, on peut conclure comme précédemment : $AFD + ABD + BCD : A'F'D' + A'B'D' + B'C'D' :: AFD : A'F'D'$. Remplaçant ce dernier rapport par son égal $AF^2 : A'F'^2$ tiré de la première proportion ci-dessus, nous aurons : $AFD + ABD + BCD$ ou le premier polygone : $A'F'D' + A'B'D' + B'C'D'$ ou le second $:: AF^2 : A'F'^2$.

Théorème 26. — *Les parties de deux cordes qui se coupent sont réciproquement proportionnelles.*

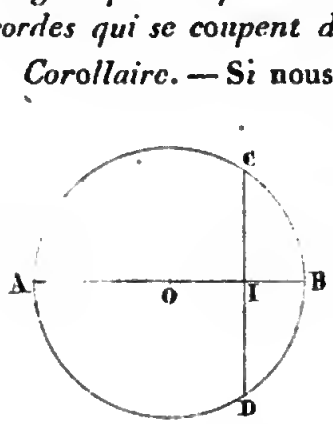
Nota. L'expression *réciproquement ou inversement proportionnelles* signifie que les deux parties de l'une des cordes forment les extrêmes de la proportion, et les deux parties de l'autre les moyens.

Joignons CA et BD. Les deux triangles ICA et BID sont semblables comme ayant deux angles égaux chacun à chacun, savoir : l'angle A égal à D comme ayant tous deux pour mesure la moitié de l'arc CB et les angles en I égaux comme opposés

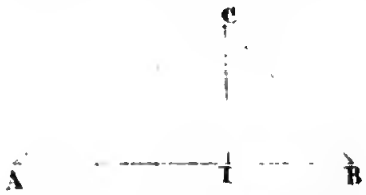


au sommet. En comparant les côtés homologues, nous aurons : CI opposé à l'angle A : IB opposé à l'angle D :: IA opposé à l'angle C : ID opposé à l'angle B. De cette proportion on tire : $CI \times ID = AI \times IB$. Et comme un rectangle est exprimé par le produit de ses deux dimensions, l'énoncé de ce théorème se dit aussi : *Les rectangles qui ont pour dimensions les deux parties de deux cordes qui se coupent dans un cercle sont équivalents.*

Corollaire. — Si nous supposons que l'une des cordes soit un diamètre et que l'autre lui soit perpendiculaire, la proportion n'en aura pas moins lieu ; mais alors les deux parties de la corde CD, perpendiculaire à AB, sont égales, d'après un théorème du deuxième livre ; la proportion deviendra : AI : CI :: CI : IB. C'est-à-dire que : *Toute perpendiculaire au diamètre est moyenne proportionnelle entre les deux parties ou segments de ce dernier.*



De cette proportion on tire : $CI^2 = AI \times IB$, de sorte que cette propriété pourra s'énoncer ainsi : *Le carré fait sur la perpendiculaire au diamètre est équivalent au rectangle qui a pour dimensions les deux segments de ce dernier.*

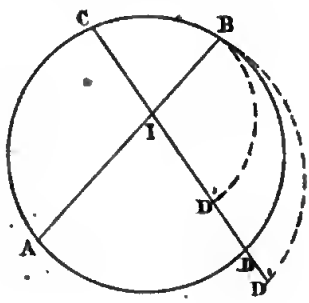


La perpendiculaire CI peut être considérée comme la hauteur d'un triangle rectangle ACB qui serait inscrit dans la demi-circonférence ACB. On peut donc dire encore que : *La perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypothénuse est moyenne proportionnelle entre les deux segments de l'hypothénuse.*

Cette propriété du triangle rectangle et toutes celles que

nous avons énoncées dans le théorème 7, sont des conséquences de la proportionnalité des côtés des triangles ABC, ACI, CIB ; ces deux derniers sont semblables entre eux comme ayant les côtés perpendiculaires, et semblables au grand comme rectangles ayant un angle aigu égal.

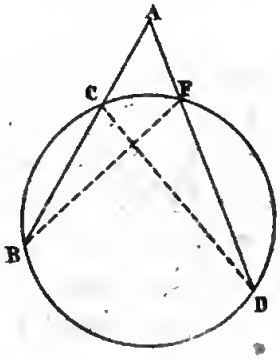
Théorème 27. — *Réciproquement si les parties de deux droites qui se coupent sont inversement proportionnelles, la circonférence qui passe par trois des extrémités passe par la quatrième.*



Car si la circonférence qui passe par les trois points A, C, B, ne passe pas par le quatrième point D, elle coupera la droite CD (ou son prolongement) en D', par exemple. On aura alors, d'après la proposition directe : CI : BI :: AI : ID'. Mais, par hypothèse, on a déjà : CI : BI :: AI : ID. Ces deux proportions ont trois termes égaux, donc les quatrièmes ID et ID' doivent l'être, ce qui est en contradiction avec la figure. Donc on ne peut supposer que la circonférence ne passe pas par le quatrième point D.

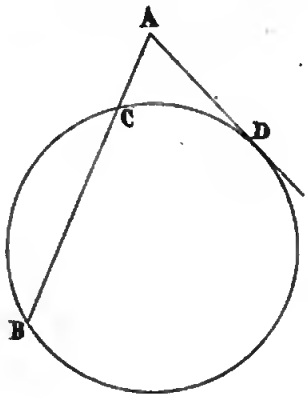
Théorème 28. — *Les sécantes d'un cercle qui partent d'un point extérieur, sont réciproquement proportionnelles avec leurs parties extérieures.*

Je dis qu'on aura : AB : AF :: AD : AC. Pour le démontrer, menons les cordes CD, BF ; les deux triangles ABF, ACD, sont semblables comme ayant deux angles égaux, savoir : l'angle A commun, et les deux angles B et D égaux comme ayant pour mesure la moitié de l'arc CF. En comparant les côtés homologues, on aura la proportion : AB opposé



à l'angle AFB : AD opposé à l'angle ACD :: AF opposé à l'angle B : AC opposé à l'angle D.

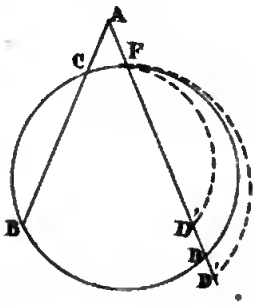
De cette proportion on tire : AB×AC=AF×AD, de sorte que l'énoncé peut se dire ainsi : *Les rectangles qui ont pour dimensions les sécantes entières et leurs parties extérieures sont équivalents.*



Corollaire.— Si l'une d'elles devient tangente, la sécante entière et sa partie extérieure seront égales, et on aura la proportion : AB : AD :: AD : AC, c'est-à-dire que : *Toute tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière partant du même point et sa partie extérieure.*

De cette proportion on tire : AD^2 =AB×AC, égalité qui se traduit ainsi : *Le carré fait sur la tangente est équivalent au rectangle qui a pour dimensions la sécante entière et sa partie extérieure.*

Théorème 29.—*Réciproquement si deux droites se coupent et que les droites entières et leurs segments, comptés à partir du point d'intersection, soient inversement proportionnels, la circonférence qui passera par trois des points de division passera par le quatrième.*



Car si la circonférence qui passe par les trois points B, C, F, ne passait pas par le quatrième D, elle couperait AD ou son prolongement en D' par exemple. On aurait alors la proportion : AF : AC :: AB : AD'; mais, par hypothèse, on a déjà : AF : AC :: AB : AD. Ces deux proportions ayant trois termes égaux, les quatrièmes devraient l'être, ce qui est en contradiction avec la figure.

FIN DU TROISIÈME LIVRE.

EXERCICES SUR LE TROISIÈME LIVRE.

1. Figurer un parallélogramme et sa hauteur, en considérant comme base chacun des côtés adjacents. Même tracé pour le triangle.

2. Dessiner deux rectangles ayant pour dimensions : l'un $4^m,50$ et $2^m,25$, l'autre $3^m,60$ et $1^m,90$. Si la surface du premier est de $10^{m^2},1250$, quelle sera celle du second ?

3. Dessiner deux rectangles ayant pour bases : l'un 5^m, l'autre 3, et pour hauteur commune $2^m,70$. Si la surface de l'un est de $13^{m^2},50$, quelle sera celle du second ?

4. Mesurer ce dernier directement. Enoncer sa surface en mètres et fractions décimales du mètre carré. L'énoncer en décimètres carrés, puis en centimètres carrés.

5. Dessiner un carré d'un côté de $3^m,60$. Mesurer sa surface.

6. Dessiner un parallélogramme ayant pour base $4^m,50$, pour côté adjacent $2^m,60$; pour angle compris $30^o\ 20'$. Mesurer sa hauteur et calculer sa surface.

7. Dessiner une suite de triangles ayant même base $3^m,50$, pour hauteur $2^m,70$ et ayant tous leurs sommets sur une parallèle à la base. Valeur de la surface de l'un d'eux. Sa relation avec les autres.

8. Dessiner un trapèze isocèle ayant pour base inférieure $4^m,60$; pour base supérieure $3^m,30$; pour hauteur $2^m,50$. Evaluer sa surface.

9. Dessiner un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit 3^m, 4^m, et les carrés construits sur chacun des trois côtés. Relation de ces carrés. Grandeurs numériques de l'hypothénuse et des projections de chaque côté de l'angle droit sur celle-ci.

10. Dessiner un triangle rectangle ayant pour hypothénuse

$5^m,20$; pour un des côtés de l'angle droit $3^m,60$. Trouver l'autre côté par le calcul.

11. Tracer un carré de $3^m,25$ de côte, et sa diagonale ; calculer celle-ci. Vérifier le résultat en partant de cette diagonale pour trouver le côté.

12. Construire un triangle ayant pour côtés $3^m,60$, $4^m,70$; pour projection du premier sur celui-ci $2^m,60$. Calculer le troisième côté.

13. Construire un triangle ayant pour côtés $4^m,20$, $2^m,10$, et pour projection du premier sur le second $3^m,10$. Calculer le troisième côté.

14. Construire un triangle ayant pour côtés $3^m,50$, $3^m,10$; et pour projection du premier sur le prolongement du second $2^m,50$. Calculer le troisième côté.

15. Tracer dans un triangle une parallèle à la base. Relations qui existent entre les parties interceptées.

16. Tracer dans un triangle une suite de parallèles à la base. Relations entre les parties interceptées.

17. Mener dans un triangle une parallèle à la base : 1° à la moitié ; 2° au tiers du côté adjacent. Relations entre ces parallèles et la base.

Nota. Dans cet exercice et les suivants où il faudra diviser une droite en plusieurs parties égales, on cherchera au moyen du Kutch, la longueur de la droite et on la divisera arithmétiquement.

18. Tracer dans un triangle une parallèle à la base, puis diverses droites partant du sommet opposé et aboutissant à cette base. Relations entre les parties interceptées sur cette base et sa parallèle.

19. Dessiner deux triangles semblables : les côtés du petit devront être les deux tiers des côtés homologues du grand. Relations qui donnent lieu aux quatre premiers caractères de similitude.

20. Dessiner pour exemple du cinquième caractère de similitude deux triangles ayant leurs côtés perpendiculaires. Indication des angles égaux et des côtés homologues.

21. Construire un polygone quelconque ; dessiner son sem-

blable en réduisant les côtés aux deux tiers. On calculera les côtés de celui-ci. On fera les angles au rapporteur et on notera leurs indications.

22. Même problème par la décomposition en triangles (deux procédés). Mesurer la surface du premier, en déduire celle du second par le rapport des côtés homologues.

23. Si un polygone a pour surface $5^{m^2},25$ et pour un des côtés $1^m,60$, quel serait le côté homologue d'un polygone dont la surface serait de $12^{m^2},50$?

24. Tracer une circonférence avec deux cordes qui se coupent. Relation qui existe entre les parties de ces cordes. Que devient cette relation quand l'une est diamètre et l'autre perpendiculaire à celle-ci?

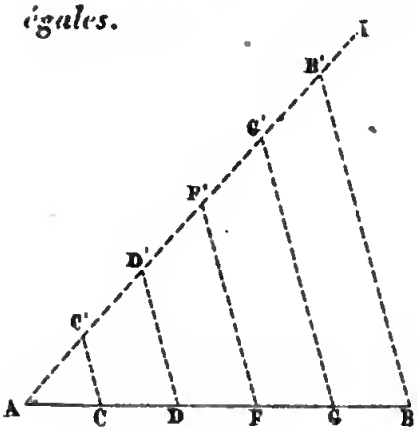
25. Tracer une circonférence avec deux sécantes partant du même point. Relation qui existe entre les sécantes entières et leurs parties extérieures. Que devient cette relation si l'une est tangente?

FIN DES EXERCICES DU TROISIÈME LIVRE.

Digitized by Google

PROBLÈMES DU TROISIÈME LIVRE.

PROBLÈME 1. — *Diviser une droite donnée en parties égales.*

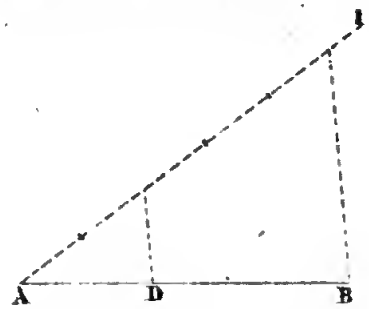


Analyse. — Soit la droite AB qu'il s'agit de diviser par exemple en cinq parties égales. Supposons les quatre points de division trouvés ; formons en A un angle quelconque, et par les points de division C, D, F, G, B menons des parallèles sous une inclinaison quelconque, jusqu'à la rencontre de la droite indéfinie AI ; les parties interceptées AC', C'D', etc., sont égales, et elles seront plus ou moins grandes sans cesser d'être égales si l'on fait varier l'inclinaison des parallèles. La grandeur des divisions de AI est donc arbitraire. Donc les points C', D', etc., peuvent être déterminés d'avance, et on en déduira les points C, D, etc., par le tracé suivant.

Synthèse. — Formez en A un angle quelconque avec AB, portez sur la nouvelle droite indéfinie AI cinq divisions égales et arbitraires, joignez le dernier point de division B' au point B, et par les points intermédiaires C', D', etc., menez des parallèles à B'B jusqu'à la rencontre de AB, vous aurez les quatre points de division en question.

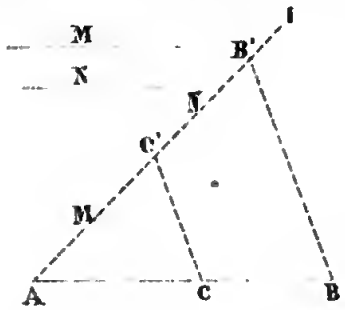
Pour résoudre la question arithmétiquement, il est évident qu'il faut mesurer la droite et porter dessus le quotient numérique de sa longueur par le nombre voulu de parties.

Problème 2. — *Diviser une droite en deux parties qui soient entre elles dans un rapport donné.*



1° Si le rapport est donné en nombres : 2 : 3 par exemple, il est évident que le problème revient à diviser la droite en cinq parties, et en général en un nombre de parties égales, marqué par la somme des termes du rapport, et à considérer le second point de division et en général celui qui est donné par l'antécédent du rapport.

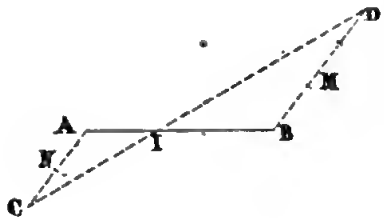
La distance du point A au point cherché serait donnée arithmétiquement, en multipliant par 2 le quotient de la longueur donnée par 5. Ainsi au cas particulier où la droite AB serait de $3^m,70$ on aurait : $AD = \frac{3^m,70}{5} \times 2$ ou $\frac{3,^m70 \times 2}{5}$. Il est préférable de multiplier 3,70 par 2 avant de diviser par 5, au lieu de diviser 3,70 par 5 et multiplier le quotient par 2, parce que dans ce dernier cas, si le quotient n'était pas exact, la multiplication par 2 doublerait l'erreur.



2° Si le rapport est donné en lignes :: M : N par exemple, il est évident qu'en les portant successivement sur la droite indéfinie AI, joignant le dernier point B' à l'extrémité B de la droite donnée, puis menant la parallèle C'C, le point C serait le point demandé.

Il y a un second procédé fondé sur la proportionnalité des côtés homologues des triangles semblables.

Il consiste à mener par les deux extrémités A et B de la droite deux parallèles sous une inclinaison quelconque, et à prendre sur l'une autant de divisions égales et arbitraires qu'il y a d'unités dans l'antécédent du rapport, et sur l'autre

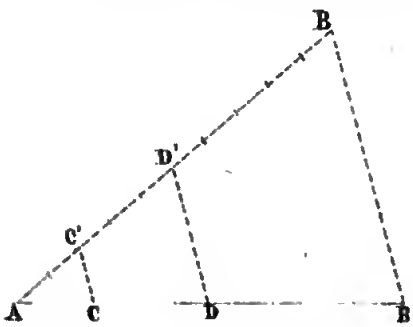


autant de divisions égales aux premières qu'il y a d'unités dans le conséquent, puis à joindre les derniers points de division : le point de rencontre de la nouvelle droite CD avec la droite donnée est le point demandé.

En effet, les deux triangles AIC, BID, sont semblables comme ayant deux angles égaux, savoir : les deux angles en I égaux comme opposés par le sommet, et les angles A et B égaux comme alternes-internes. Donc on aura la proportion : AI : IB :: AC : BD ou bien :: 2 : 3 si 2 : 3 est le rapport donné.

Il est évident que si le rapport est donné en lignes, il faudra prendre AC égale à une d'elle et BD égale à l'autre*.

Corollaire. — S'il s'agissait de partager une droite en trois parties qui fussent entre elles comme des nombres donnés 2, 3 et 5, par exemple, il faudrait recourir au 1er procédé, et prendre sur AI une suite de divisions égale à 2 + 3 + 5 ou 10, joindre le dernier point de division à l'extrémité B de la droite, et par les points C′ et D′ correspondants aux numéros 2 et 2 + 3 ou 5 mener des parallèles à B′B.



Pour résoudre la question arithmétiquement, on mesurerait la droite AB, on diviserait sa longueur numérique par 10, et on multiplierait le quotient par les nombres 2, 3, 5. On aurait ainsi, en supposant AB égale à $4^m,20$: $AC = \frac{4^m,20 \times 2}{10}$, $CD = \frac{4^m,20 \times 3}{10}$, $DB = \frac{4^m,20 \times 5}{10}$, en ayant égard à l'observation faite précédemment.

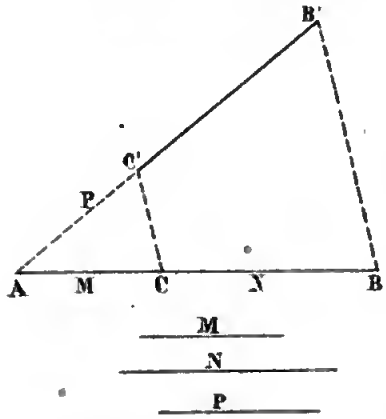
Enfin, si les trois parties étaient des droites, on les porterait

* Compas à quatre pointes.

les unes à la suite des autres sur AI pour opérer géométriquement comme sur des nombres.

Problème 3. — *Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données.*

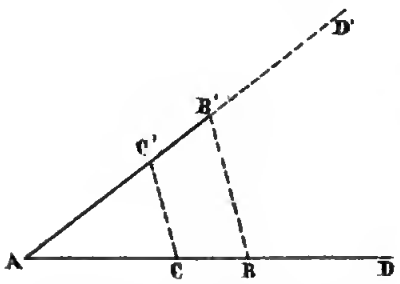
Nota. On appelle quatrième proportionnelle à trois lignes, une quatrième ligne formant une proportion avec celles-ci.



Analyse. — Rappelons-nous que toute parallèle à la base d'un triangle divise les deux autres côtés en parties proportionnelles et nous en déduirons la construction suivante.

Synthèse. — Traçons une droite indéfinie, prenons-y à la suite les deux longueurs AC=M et CB=N. Faisons en A un angle quelconque, et prenons sur la deuxième droite indéfinie une longueur AC′=P. Joignons les points C et C′, et par le point B menons une parallèle à CC′: C′B′ sera la droite demandée. Car on aura: AC:AC′::CB:C′B′ ou M : P :: N : x (x désignant la ligne inconnue).

Il y a un second procédé fondé sur la proportionnalité des côtés du triangle aux parties interceptées.

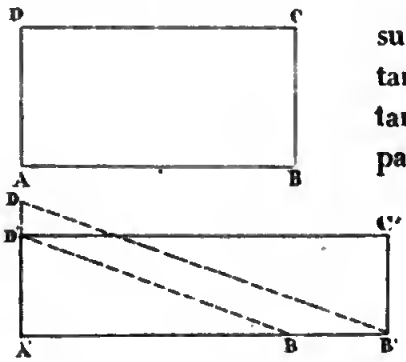


Pour cela, il faut porter sur AD à partir du point A les longueurs M et N; sur AD′ à partir du même point, la longueur P, joindre CC′, et par le point B mener une parallèle à CC′: AB′ sera la ligne demandée. Car on a: AC : AC′ :: AB : AB′ ou M : P :: N : x.

Pour résoudre la question arithmétiquement, il faudrait mesurer les trois longueurs, et établir une proportion avec celles-ci et l'inconnue. Supposons, par exemple, M=2^m,50,

$N = 3^m,75$, $P = 3^m,20$. On aurait : $2^m,50 : 3^m,75 :: 3^m,20 : x$, d'où $x = \frac{3^m,75 \times 3^m,20}{2^m,50} = 4^m,80$.

Problème 4. — *Construire sur une droite donnée un rectangle équivalent à un rectangle donné.*



Analyse. — Soit A'B' la droite sur laquelle il faut faire un rectangle A'B'C'D' équivalent au rectangle ABCD. Si nous désignons par x sa hauteur, sa surface sera donnée par l'expression $A'B' \times x$; celle du rectangle ABCD le sera par $AB \times AD$, et comme elles sont équivalentes, on aura :

$A'B' \times x = AB \times AD$, d'où l'on tire : $A'B' : AB :: AD : x$.

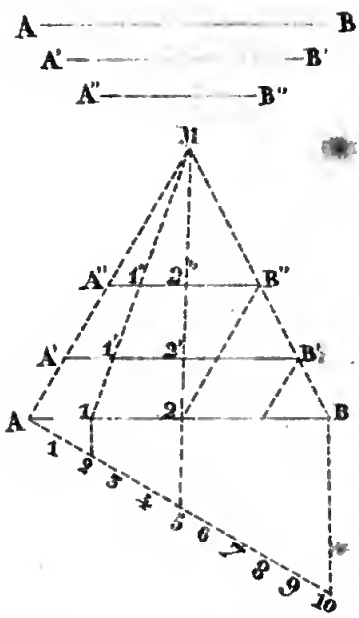
Synthèse. — Cherchez une quatrième proportionnelle aux trois droites A'B', AB, AD, ce sera la hauteur demandée. A cet effet portez AB sur A'B'. En A' élevez à A'B' une perpendiculaire indéfinie, portez-y AD ; joignez DB', et par le point B menez une parallèle à B'D ; alors A'D' sera la hauteur.

Si aux lignes A'B', AB, AD, on substitue leurs longueurs numériques dans la proportion, on calculera x comme dans le problème précédent.

Corollaire.—Si la figure donnée était un parallélogramme ou un triangle, on chercherait une quatrième proportionnelle à la base donnée du rectangle et aux deux dimensions du parallélogramme donné ou du parallélogramme équivalent au triangle dans le second cas.

Problème 5. — *Diviser à la fois une suite de droites en parties qui soient entre elles comme des nombres ou des lignes données.*

Analyse. — Supposons qu'il s'agisse de diviser à la fois trois droites en trois parties qui soient entre elles comme les nombres 2, 3, 5. Supposons-les disposées parallèlement dans



l'angle quelconque de deux droites AM, MB. Si la plus grande AB, par exemple, est divisée comme les nombres 2, 3, 5, les concourantes M1, M2, diviseront de la même manière les parallèles A'B', A''B''.

Synthèse.—Sur la plus grande des trois droites données comme base, construisez le triangle quelconque AMB. Portez A'B' et A''B'' sur AB à partir du point A; par les extrémités, menez des parallèles à AM, et par les points d'intersection de celles-ci avec BM menez des parallèles à AB. Partagez AB en trois parties qui soient entre elles comme les nombres 2, 3, 5. Joignez le point M et les points de division; les deux droites A'B', A''B'' se trouveront divisées aux points 1', 2'; 1'', 2'', en parties qui seront entre elles comme les nombres 2, 3, 5*.

Si au lieu des trois nombres donnés on avait des droites, on diviserait la ligne AB en parties proportionnelles à ces droites, et le reste de l'opération se ferait comme il vient d'être dit.

Problème 6. — *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux droites.*

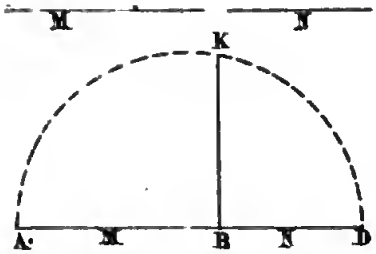
Analyse.—Rappelons-nous que 1° dans le triangle rectangle, la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypothénuse est moyenne proportionnelle entre les deux segments adjacents.

2° Chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypothénuse entière et sa projection sur celle-ci.

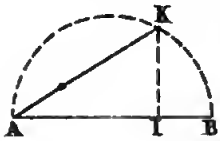
3° La tangente à une circonférence est moyenne proportionnelle entre la sécante entière qui part du même point et sa partie extérieure.

* Application à l'art du luthier.

De là trois procédés.



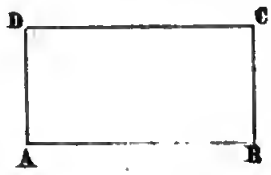
Synthèse. — 1° Sur une ligne indéfinie portez à la suite l'une de l'autre les deux lignes données M et N. Sur leur somme AD comme diamètre, décrivez une demi-circonférence. Au point B commun aux deux droites, élevez la perpendiculaire BK limitée à la circonférence, ce sera la droite demandée.



2° Sur la plus grande des deux lignes M comme diamètre, décrivez une demi-circonférence, portez N à partir du point A sur cette même droite, et à son extrémité I élevez une perpendiculaire limitée à la circonférence en K ; joiguez KA, ce sera la droite demandée.

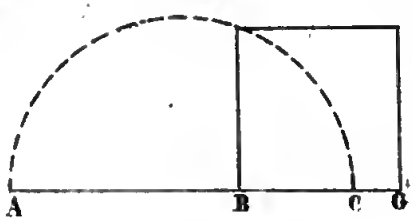
3° Portez N sur M à partir du point A ; sur la différence IB comme diamètre, décrivez une demi-circonférence, et par le point A menez la tangente AT. Ce sera la droite demandée.

Pour résoudre la question par l'arithmétique, on mesurerait les longueurs des deux droites (supposons l'une de $2^m,50$ et l'autre de $1^m,30$), et on poserait la proportion : $2^m,50 : x :: x : 1^m,30$, d'où $x^2 = 2^m,50 \times 1^m,30$, d'où enfin $x = \sqrt{2^m,50 \times 1^m,30} = 1^m,80$.



Problème 7. — *Faire un carré équivalent à un rectangle donné.*

Analyse.—Soit ABCD le rectangle donné et x le côté du carré cherché.



La surface du rectangle sera : $AB \times BC$, et celle du carré sera exprimée par x^2. Comme elles doivent être équivalentes,

on aura la relation : $x' = AB \times BC$, d'où $AB : x :: x : BC$. D'où il résulte que :

Synthèse. — Le côté du carré est une moyenne proportionnelle entre les dimensions du rectangle.

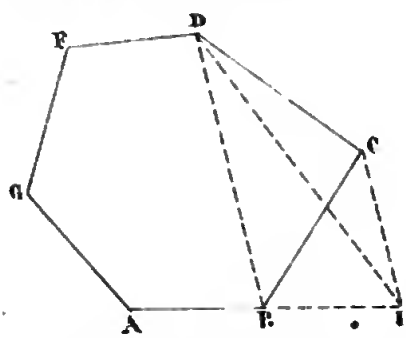
La figure en marge est faite par le premier procédé.

Pour trouver le côté numérique, on évaluerait les deux dimensions du rectangle, et on opérerait comme dans le problème précédent.

Corollaire. — Pour transformer un parallélogramme en un carré équivalent, il faudrait aussi chercher une moyenne proportionnelle entre la base et la hauteur. Pour un triangle, ce serait une moyenne entre une des dimensions, la base par exemple, et la moitié de l'autre.

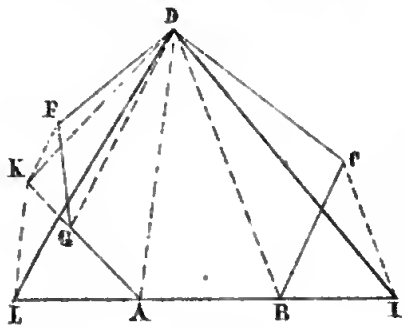
Problème 8. — *Transformer un polygone en un carré équivalent.*

Pour cela nous transformerons d'abord le polygone en un triangle équivalent, puis ce triangle en un carré par le moyen qui a été exposé dans le problème précédent.



Analyse. — Soit ABCDFG le polygone donné. Il est évident que, si nous savions le transformer en un autre qui ait un côté de moins, en opérant sur ce dernier comme sur le polygone proposé, nous arriverions à un polygone qui aurait deux côtés de moins, et en suivant la même marche à un triangle. A cet effet, menons la diagonale BD qui donne lieu au triangle BDC. Si nous pouvions changer ce triangle en un autre équivalent dont le sommet, joint au point B, serait en ligne droite avec AB au lieu de former la ligne brisée ABC, la question auxiliaire serait résolue. A cet effet prolongeons AB, considérons la diagonale comme base, et menons-lui une parallèle par le sommet C jusqu'à la rencontre du prolongement de AB. Le

triangle BDI remplacera le triangle EDC comme ayant même base et même hauteur. Par conséquent le polygone AIDFG remplacera le polygone proposé. Opérant de même sur celui-ci, puis sur le nouveau, le problème sera résolu.



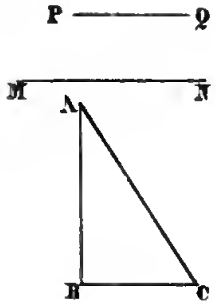
Synthèse.— Menez la diagonale BD, prolongez AB; par le point C menez une parallèle à BD jusqu'à sa rencontre en I avec le prolongement de AB. Joignez DI; le triangle BDI, équivalent à BDC le remplacera, et on considérera le polygone AIDFG. Dans celui-ci menons la diagonale DG, prolongeons le côté adjacent AG, et par le point F menons une parallèle à DG jusqu'à sa rencontre avec le prolongement de AG, joignons DK; le triangle résultant DKG remplacera le triangle FDG. Le polygone sera donc réduit au quadrilatère AIDKA. Menons encore dans celui-ci la diagonale DA, sa parallèle KL et prolongeons BA jusqu'à sa rencontre en L, joignons DL; le triangle DLA remplacera le triangle DKA: par conséquent le quadrilatère sera transformé en un triangle DLI.

La moyenne proportionnelle entre sa base et la moitié de sa hauteur donnera le côté du carré équivalent.

Pour résoudre le problème par l'arithmétique, on décomposerait le polygone en triangles, on évaluerait ainsi sa surface, et la racine quarrée de cette surface numérique donnerait le côté du carré. Car si cette surface était de $16^{m^2},25$ par exemple, et x le côté du carré équivalent, on aurait la relation: $x^2 = 16^{m^2},25$, d'où $x = \sqrt{16^{m^2},25} = 4^m,03$.

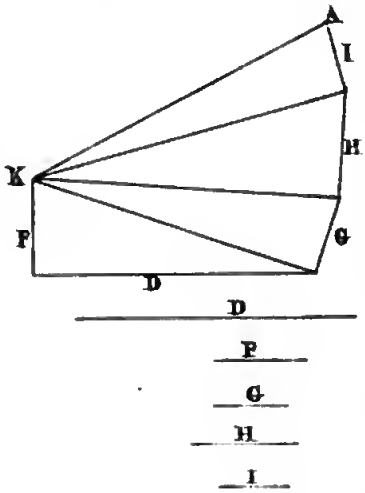
Problème 9. — *Trouver le côté d'un carré équivalent à la somme de deux carrés donnés.*

Analyse. — Rappelons-nous que le carré fait sur l'hypothénuse d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des carrés faits sur les deux autres côtés.



Synthèse. — Tracez un angle droit, sur l'un des côtés portez MN l'un des côtés du grand carré, et sur l'autre portez PQ l'un des côtés du petit. Joignez les deux points A et C ainsi obtenus, AC sera le côté du carré demandé.

Il est évident que si l'on voulait trouver le côté d'un carré équivalent à la somme de tant de carrés qu'on voudrait, il faudrait trouver d'abord le côté du carré équivalent à la somme des deux premiers, puis celui qui serait égal à la somme de celui-ci et du troisième, et ainsi de suite. Soient D, F, G, H, I, les côtés de cinq carrés à la somme desquels on veut trouver le carré équivalent. Consultez la figure en marge. KA sera le côté du carré demandé.



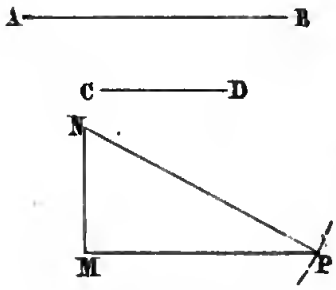
Pour résoudre la question par l'arithmétique, il faudrait mesurer chacun des côtés des carrés donnés, et extraire la racine quarrée de la somme des quarrés numériques de ces côtés. Si l'un vaut $3^m,50$, le second $2^m,25$, le troisième $4^m,10$ (x désignant le côté demandé), on aura :

$$x = \sqrt{3^m,50^2 + 2^m,25^2 + 4^m,10^2} = \sqrt{34^{m^2},1225} = 5^m,84.$$

Problème 10. — *Trouver le côté d'un carré équivalent à la différence de deux carrés donnés*

Analyse. — Rappelons-nous que le carré fait sur l'un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle est égal à la différence des carrés de l'hypothénuse et de l'autre côté.

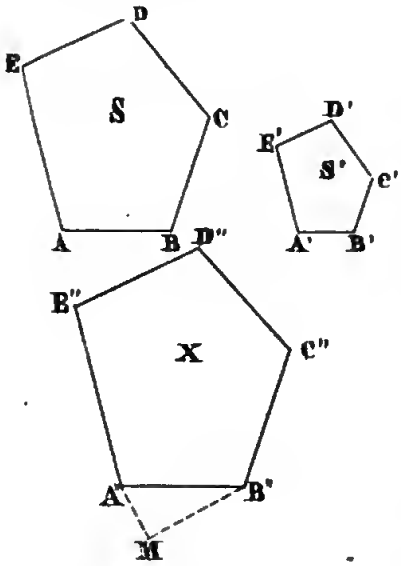
Synthèse. — Faites un angle droit, sur l'un des côtés portez le plus petit côté CD des carrés donnés, et du point N qui en résulte avec le plus grand AB, décrivez un arc de cercle



qui coupe en P l'autre côté de l'angle. MP sera le côté du carré cherché.

On aura la valeur numérique de MP en mesurant AB, CD, et extrayant la racine quarrée de la différence de leurs quarrés. Si AB vaut $4^m,50$ et CD $2^m,30$, on aura : $x = \sqrt{4^m,50^2 - 2^m,30^2} = \sqrt{14^{m^2},9600} = 3^m,86$.

Problème 11. — *Construire un polygone semblable à deux polygones donnés et équivalent à la somme de leurs surfaces*

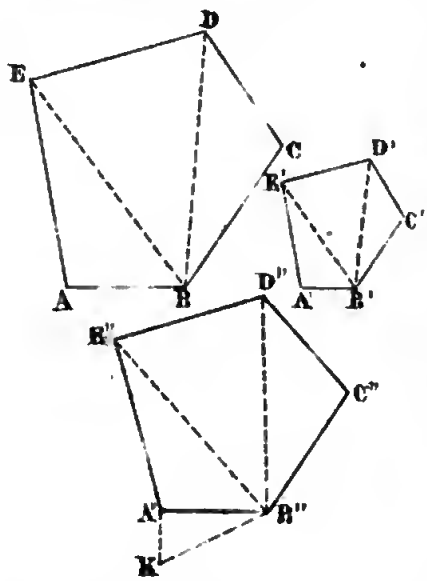


Analyse. — Nous savons que lorsqu'on connaît deux côtés homologues de deux polygones semblables dont l'un est déjà construit et dont l'autre est à construire, le problème est ramené au tracé 22 des exercices du troisième livre. Ainsi le polygone cherché serait déterminé si l'on connaissait, par exemple, le côté homologue à AB, A'B'. A cet effet, appelons S et S' les surfaces des deux polygones semblables donnés. Nous aurons la relation : $S : S' :: AB^2 : A'B'^2$. Dans cette proportion on peut dire : la somme des deux premiers termes est au premier comme la somme des deux derniers est au troisième, c'est-à-dire : $S + S' : S :: AB^2 + A'B'^2 : AB^2$. Comparons de même le polygone cherché au polygone S. Appelons X sa surface et x le côté homologue à AB, nous aurons : $X : S :: x^2 : AB^2$. Observons que X doit être égal à $S + S'$. Donc ces deux proportions ont trois termes égaux, et il en résulte que les quatrièmes le sont ; donc $x^2 = AB^2 + A'B'^2$. D'où nous concluons que :

Synthèse. — Le côté homologue à AB, A'B', du polygone cherché est l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont AB, A'B', sont les deux côtés de l'angle droit. Consultez pour le reste la figure en marge.

Pour résoudre la question numériquement, il faut mesurer chacun des côtés homologues dans les deux figures, la racine quarrée de la somme de leurs quarrés donne la valeur numérique du côté homologue du polygone cherché. Alors il est facile à construire puisqu'on en connaît les côtés et les angles; car ces derniers sont égaux à ceux des polygones proposés.

Problème 12. — *Construire un polygone semblable à deux autres et équivalent à la différence de leurs surfaces.*



Analyse. — Le problème consiste à trouver comme précédemment le côté du polygone cherché homologue à AB, A'B'. Alors le plus grand des polygones proposés a une surface égale à la somme des surfaces du plus petit et du polygone cherché. Donc AB doit être l'hypothénuse du triangle rectangle dont A'B' et le côté cherché seraient les côtés de l'angle droit.

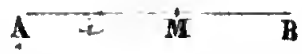
Synthèse.—Faites un angle droit, portez le côté A'B' du plus petit polygone sur l'un des côtés de l'angle et du point K qui en résulte comme centre avec AB pour rayon décrivez un arc de cercle qui coupe l'autre côté de l'angle, en B'' par exemple. A''B'' sera le côté cherché. Le reste se fera comme précédemment.

Les valeurs numériques de chacun des côtés du polygone cherché sont les racines quarrées des différences des quarrés

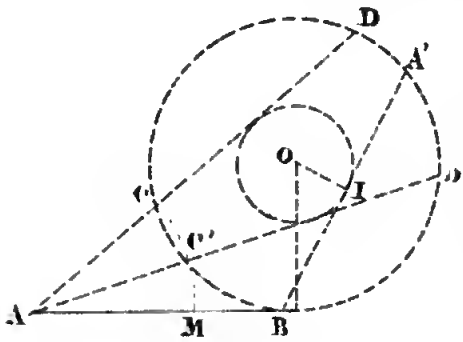
numériques des côtés homologues des polygones donnés. Ces valeurs une fois calculées, on aura tous les éléments du polygone cherché sans employer la construction géométrique précédente *.

Problème 13. — *Diviser une ligne en moyenne et extrême raison.*

Nota. C'est diviser une droite en deux parties telles que la plus grande soit moyenne proportionnelle entre la ligne entière et la plus petite.



Analyse. — Soit AB la droite donnée, M le point cherché. Désignons par x la plus grande partie AM, la plus petite MB sera évidemment égale à AB — x. D'après l'énoncé, on devra avoir : AB : x :: x : AB — x, proportion dans laquelle x figure trois fois. L'inconnue n'y figurera plus que deux fois si on applique le principe suivant : la somme des deux premiers termes est au premier comme la somme des deux derniers est au troisième. Alors on aura : AB + x : AB :: AB : x, c'est-à-dire que AB est moyenne proportionnelle entre x et AB + x. Par conséquent AB peut être considérée comme une tangente à une circonférence dont AB + x serait la sécante entière et x la partie extérieure. Le problème est donc ramené à mener à l'extrémité de la tangente AB à une circonférence, une sécante telle que la partie comprise dans cette circonférence soit égale à AB.

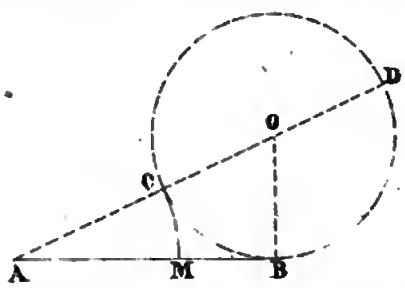


Synthèse. — En B élevez une perpendiculaire d'une grandeur BO arbitraire. Du point O comme centre avec cette perpendiculaire pour rayon décrivez une circonférence. Portez-y AB comme corde, et décrivez du centre O avec sa distance OI à cette corde une circonférence à

* Méthode des carreaux.

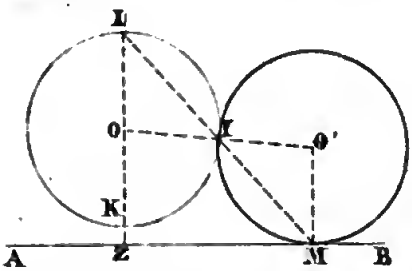
laquelle vous menerez du point A une tangente limitée en D à la grande circonférence. Cette tangente à la circonférence OI est une sécante par rapport à la grande OB, et la partie comprise dans le cercle est égale à AB ou à son égale A'B, comme cordes équidistantes du centre. Donc en rabattant la partie extérieure AC sur AB, on aura le point M demandé.

Discussion. — Le rayon BO est arbitraire, mais il doit être assez grand pour qu'on puisse inscrire AB comme corde dans la circonférence, c'est-à-dire qu'il doit être plus grand que la moitié de AB ou lui être tout au plus égal. La moitié de la droite donnée est donc la limite inférieure du rayon arbitraire. Il n'a pas de limite supérieure puisqu'on pourra toujours inscrire AB comme corde dans une circonférence qui aura un diamètre plus grand que AB. Les deux tangentes AD, AD', qui sont sécantes par rapport à la grande circonférence ne donnent qu'une solution. Car elles sont égales et leurs parties extérieures aussi. Si nous adoptons pour rayon de la circonférence sa limite inférieure, le tracé se simplifie. Alors on élève en B une perpendiculaire BO égale à la moitié de AB. Du point O comme centre on décrit une circonférence avec BO pour rayon. On joint le point A au centre et on rabat AC sur AB. Le point M est le point demandé. En effet, la corde CD est diamètre, par conséquent elle est double de BO, c'est-à-dire égale à AB *.



* Pour trouver la valeur numérique de AM quand on connaît celle de AB, il faut avoir recours à l'algèbre. Soit a la ligne donnée. De la proportion : $a : x :: x : a-x$, nous tirons : $x^2 = a(a-x)$, d'où $x^2 = a^2 - ax$. Ordonnant par rapport à x, il vient : $x^2 + ax = a^2$. Résolvant cette équation qui est du second degré, nous aurons : $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$. La seconde valeur est négative et reçoit une interprétation géométrique, sur laquelle nous ne nous arrêterons pas, eu égard au cadre que nous nous sommes

Problème 14. — *Mener une circonférence tangente à une droite donnée en un point donné et à une circonférence donnée.*



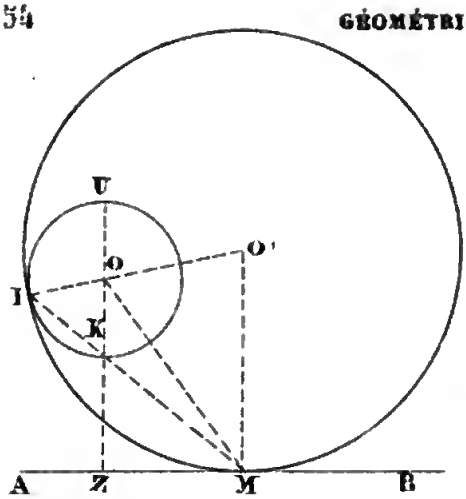
Analyse. — Soit AB la droite donnée, M le point donné et OK la circonférence donnée. Supposons pour le moment que O' soit le centre du cercle cherché. Joignons le point M de contact à ce centre, O'M sera perpendiculaire à AB. Par le centre O menons une parallèle OZ à O'M, prolongeons-la jusqu'en U, et joignons les deux points U et M au point de contact I des deux circonférences; puis menons la ligne des centres OO'. Les deux triangles OUI et IO'M sont semblables comme isocèles ayant un angle égal O=O' comme angles alternes-internes. Donc les deux angles en I sont égaux; mais comme OO' est une ligne droite, les trois points U, I, M sont en ligne droite aussi. Ainsi on aura le point de contact I en joignant le point U au point M. Le centre sera donc obtenu par la construction suivante :

Synthèse. — Du point M élevons une perpendiculaire indéfinie; du centre O menons une parallèle indéfinie à cette perpendiculaire, joignons au point M son point de rencontre U avec la circonférence, la droite coupe en I la circonférence donnée. Joignons le centre à ce point et prolongeons jusqu'au point d'intersection O' avec la perpendiculaire O'M. Ce point sera le centre de la circonférence demandée, et O'I ou O'M sera le rayon.

Discussion. — La parallèle OZ à O'M coupe la circonférence O en un second point K qui donne lieu comme le point U

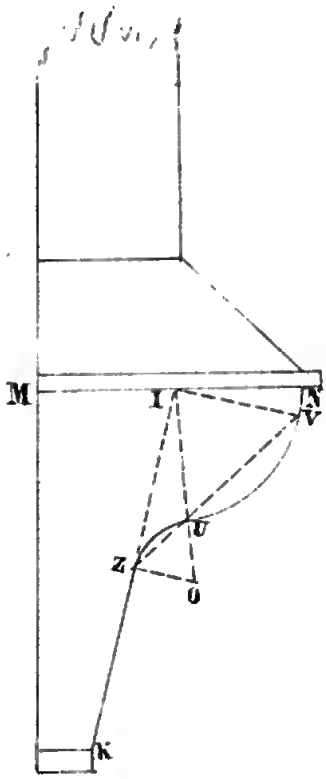
---

imposé. La première valeur $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$ peut se mettre sous la forme : $x = a\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = 0{,}6479 \times a$. C'est-à-dire que AM est les 0,6479 de la ligne donnée



à une droite KM. Son prolongement coupe la circonférence donnée en un point I qui est aussi le point de contact d'une seconde circonférenc O', dont le centre s'obtient d'une manière analogue à celle de la première solution.

Le problème est toujours possible, parce que les constructions auxiliaires sont toujours praticables même lorsque la droite donnée coupe la circonférence donnée, et que le point de contact donné sur cette droite est dans la circonférence.



Ce problème, dont on a souvent besoin dans les raccordements de cercles, peut recevoir une application importante dans le tracé des jambages d'une cheminée de cuisine dite cheminée *en hotte renversée*. Le tuyau de cette cheminée est évasé par le bas pour mieux recevoir la fumée et les évaporations du foyer, et c'est cet évasement qui lui a fait donner le nom de cheminée en hotte. Les jambages destinés à soutenir la maçonnerie et la tablette sont évidés par le bas pour faciliter la circulation tout autour du foyer, et donner la faculté de brûler le bois dans sa longueur. On se donne ordinairement la largeur MN du bas du tuyau, la droite KI qui joint le sommet K du socle au milieu I de la largeur MN. On prend le milieu Z

de cette droite, et on remplace la ligne ZN par une espèce de talon à arcs inégaux. L'élément de courbe qui passe par le point N doit être perpendiculaire à MN, parce qu'en coupe de pierres les angles aigus présentent peu de solidité. Pour cela on décrit du point I comme centre avec IN pour rayon un arc de cercle, et la question est ramenée à tracer par le point Z un arc de cercle tangent au premier et à la droite KI au point Z. C'est le problème précédent. Du point I on élève donc une perpendiculaire à IK jusqu'à sa rencontre V avec la circonférence; au point Z on mène une parallèle à cette perpendiculaire, on joint IU et on prolonge jusqu'au point de rencontre O avec ZO. Ce point est le centre de l'arc concave ZU.

APPLICATIONS.

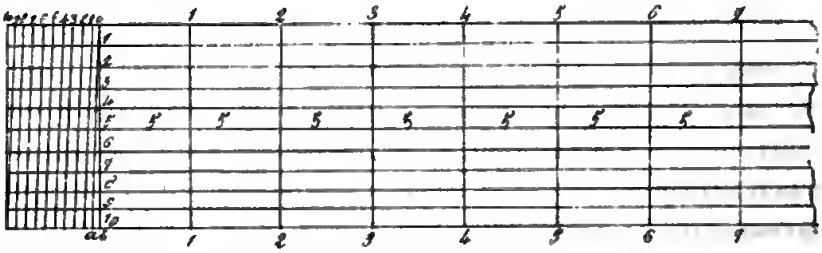
DE L'ÉCHELLE DES PARTIES.

Faire un dessin d'après une échelle donnée, c'est réduire les longueurs données et leurs subdivisions à des longueurs plus petites ayant avec les premières un rapport donné. Ainsi l'échelle est dite au centième, si on adopte le centimètre pour unité de longueur dans le dessin au lieu du mètre. Elle est dite au millième, si le millimètre remplace le mètre; au dix-millième si le dix-millimètre remplace le mètre. Plus généralement elle est dite aux $\frac{3}{5}$ si les $\frac{3}{5}$ du mètre ou la fraction décimale équivalente $0^m,6$ remplace le mètre.

L'échelle des parties est une figure géométrique qui a pour but de transformer de suite une longueur donnée et ses subdivisions, en la longueur réduite d'après le rapport voulu.

Supposons pour fixer les idées, qu'il s'agisse de construire une échelle au centième. A cet effet on trace une droite indéfinie sur laquelle on porte une suite de centimètres numérotés de gauche à droite 0, 1, 2, etc.; de sorte que pour prendre une longueur 3 mètres, par exemple, on ouvre

le compas du n° 0 jusqu'au n° 3. Pour représenter les dixièmes de mètre à l'échelle on porte un centimètre de plus à gauche du zéro, et on le divise en dix parties égales qu'on numérote de droite à gauche. Ainsi la longueur $3^m,7$ se prendra en ouvrant le compas depuis le n° 7 de cette dernière division



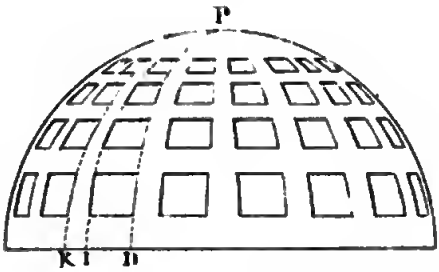
jusqu'au n° 3 de la première. La difficulté de distinguer à l'œil nu, les subdivisions en dix parties égales de chacune des petites divisions qu'on vient de construire, a fait recourir au moyen suivant : On trace dix parallèles à la première droite longitudinale, toutes équidistantes, de manière que la dernière forme un rectangle avec la première. On divise celle-ci comme la première, on la numérote de même, excepté les divisions du centimètre à gauche du zéro qu'on ne numérote pas. On joint les points de division correspondants de la grande division. Quant à ceux de la petite, on joint, par une diagonale, le n° 9 de celle-ci à l'extrémité de droite du centimètre inférieur correspondant. Puis, par les points 8, 7, 6, etc., on mène des parallèles à cette diagonale. Ces parallèles vont aboutir aux points de division inférieurs. Les dix parallèles dans le sens longitudinal sont numérotées de haut en bas. Dans le triangle $0ab$, les portions de ces parallèles comprises entre la diagonale $0a$ et la droite $0b$ sont successivement de : $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, etc., de ab, ou de 1 décimètre d'après l'échelle, et donnent par conséquent 1, 2, 3, etc., centimètres.

En effet, chacune d'elles est à ab comme sa distance au sommet commun des petits triangles successifs est à la distance $0b$. Ainsi s'il est question, par exemple, de celle qui correspond au n° 4, elle sera à ab comme $04 : 0b$ ou comme

4 : 10 ; elle vaudra donc les $\frac{4}{10}$ de *ab* ou de 1 décimètre, c'est-à-dire, 4 centimètres. Il résulte de là que pour prendre une longueur de $3^m,72$, il faut ouvrir le compas sur la parallèle longitudinale numérotée 2, depuis la diagonale correspondante au n° 7 de la petite division jusqu'à la verticale qui correspond au n° 3 de la grande division.

ORNEMENTS DES COUPOLES.

Lorsqu'on veut orner l'intérieur d'une coupole, on en partage la surface en un certain nombre de parties égales par des grands cercles ou *méridiens*, qui vont du point culminant ou *pôle* au cercle de base (nous verrons plus tard par quel moyen). Puis, dans chacun des intervalles compris entre deux méridiens consécutifs, on dessine des petits trapèzes symétriques ou isocèles dont les dimensions sont proportionnelles à leurs distances au pôle. De plus les distances qui séparent un trapèze de ses voisins au-dessus et latéralement doivent être égales, et décroître suivant la même loi de bas en haut. Supposons développée sur un plan la surface limitée par deux méridiens consécutifs, qui comprennent un vide et un plein, c'est-à-dire, un intervalle destiné à séparer une série verticale de trapèzes de la suivante, et un autre destiné à être rempli de trapèzes. Ce développement, qui ne peut se faire rigoureusement et qui n'est ici qu'approximatif, aura la forme d'un triangle isocèle ayant pour base la distance des pieds de deux méridiens, et pour côtés le développement en ligne droite d'un arc



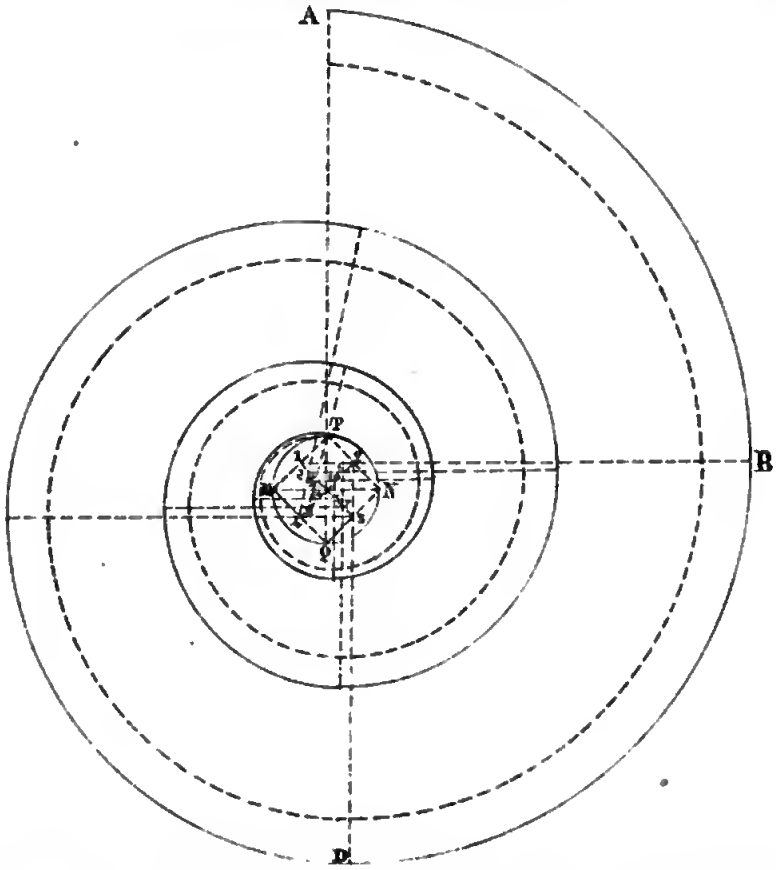
de méridien. On se donne la largeur KI du vide à la base, on porte alors KI de I en A, par ce point on mène une parallèle à KD; on prend BC égal à AB et on mène par ce point une nouvelle parallèle à KD, on a le premier trapèze ABCI'; on prolonge CI' et on prend encore I'A' égal à I'K', la parallèle A'B' donne la base du second, qu'on achève de construire d'une manière analogue au premier. Quand on arrive à des trapèzes trop petits, on remplace leur ensemble sur la coupole par une calotte sphérique. Il est évident que ce tracé donne les dimensions des trapèzes proportionnelles à leurs distances au pôle, et les distances qui séparent chaque trapèze de ses voisins décroissent suivant la même loi. Car on a les proportions :

AB : A'B' :: AP : A'P et KI ou AI : K'I' ou A'I' :: IP : I'P.

DE LA VOLUTE IONIQUE.

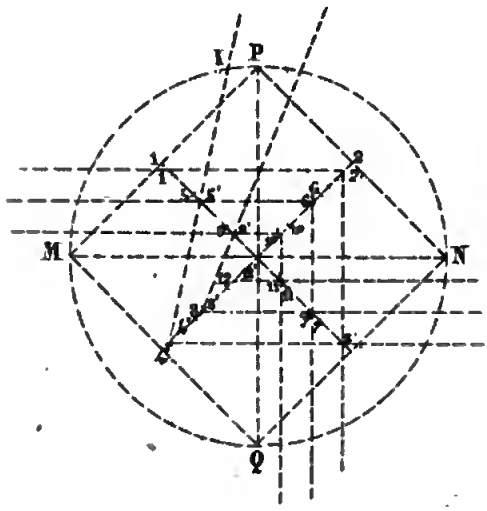
La volute ionique est une courbe qui figure dans le chapiteau de la colonne de l'ordre ionique. Son tracé repose à la fois sur la théorie des arcs qui se raccordent et sur la proportionnalité des droites.

On se donne la distance AC de l'origine de la volute au centre de *l'œil* ou du cercle auquel la courbe vient se terminer presque tangentiellement, et on prend pour rayon de ce dernier $\frac{1}{8}$ de cette distance AC. Après l'avoir décrit, on trace deux diamètres à angles droits; on joint leurs extrémités deux à deux. Par le centre de l'œil on mène des parallèles aux deux côtés MP, MQ, du carré MPNQ. On partage en trois parties égales chacune des moitiés de ces parallèles, et on numérote les points de division dans l'ordre qu'indique la figure. On joint, par des droites prolongées indéfiniment, les points de division deux à deux en suivant l'ordre des numéros. Du point 1 comme centre, avec sa distance à l'origine A de la volute pour rayon, on décrit un arc de cercle qu'on limite en B sur le prolongement de la droite 1.2. Du point 2 comme centre, avec un rayon égal à 2B, on décrit un



nouvel arc de cercle qu'on limite en D sur le prolongement de la droite 2.3, et ainsi de suite en prenant pour centres les différents points : 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, et pour rayons correspondants leurs distances à l'extrémité du rayon précédent. Le dernier arc rencontre la circonférence de l'œil presque tangentiellement, attendu que le dernier rayon 12.P est presque égal au rayon de l'œil et que le n° 12 est très-voisin du centre. Pour s'en rendre compte, il faut démontrer que le rayon primitif AC a diminué, après les trois révolutions, de 8 fois le rayon de l'œil. Or, la somme des parallèles : 1.2, 5.6, 9.10, est égale à 2 fois le rayon de l'œil ; car déjà 1.2 = PC comme diagonales du petit carré 1P2C. De plus 5.6 étant menée aux $\frac{2}{3}$ de C1, vaut les $\frac{2}{3}$ de 1.2 ou d'un rayon. La parallèle 9.10 étant menée à $\frac{1}{3}$ de C1,

vaut $\frac{1}{3}$ de 1.2 ou d'un rayon. En résumé, un rayon de l'œil, plus $\frac{2}{3}$, plus $\frac{1}{3}$ de ce même rayon, donnent deux rayons. Il en est de même de la somme des parallèles dans chacun des trois autres angles : 2C3, 3C4, 4C1, excepté dans ce dernier pour lequel ce résultat n'est qu'approché. Or, le rayon primitif a diminué de la somme de toutes ces parallèles; quand on arrive au dernier point de division, il a donc diminué de 8 fois le rayon de l'œil.



Si on veut que la volute ait un filet, il faut marquer le quart de chaque division à partir des numéros d'ordre, et prendre pour origine de la nouvelle volute le point A' distant du centre de l'œil de 8 fois le rayon, puis opérer comme précédemment avec les nouveaux points de division. Quand on arrivera au point 12', le rayon primitif aura en effet diminué sensiblement de 7 fois le rayon de l'œil. Car dans chacun des triangles 1C2, 2C3, 3C4, 4C1, excepté pour ce dernier pour lequel le résultat n'est qu'approché, la somme des parallèles à 1.2 est égale aux $\frac{7}{4}$ du rayon de l'œil. La parallèle 1'.2' est menée aux $\frac{11}{12}$ de 1C à partir de C, donc elle vaut les $\frac{11}{12}$ de 1.2 ou d'un rayon. La parallèle 5'.6' est menée aux $\frac{7}{12}$ de 1C, donc elle vaut les $\frac{7}{12}$ d'un rayon. La parallèle 9'.10' est menée aux $\frac{3}{12}$ de 1C, donc elle vaut les $\frac{3}{12}$ d'un rayon. La somme des trois parallèles est donc les $\frac{11+7+3}{12}$ ou $\frac{21}{12}$ ou $\frac{7}{4}$ d'un rayon. La somme de toutes dans les quatre triangles sera de 7 rayons. De même que précédemment le dernier arc de cercle aura donc sensiblement pour rayon celui de l'œil de la volute.

DE L'ARPENTAGE OU MESURAGE DES SURFACES PLANES, QUI PEUT SE RAMENER A CELUI DU TRIANGLE, DU PARALLÉLOGRAMME OU DU TRAPÈZE.

Pour mesurer l'une de ces surfaces, il faut savoir abaisser d'un point donné hors d'une droite ou élever d'un point donné sur une droite une perpendiculaire à cette droite. Nous avons vu les moyens de le faire quand la figure a peu d'étendue, mais sur le terrain ils ne seraient plus applicables. On y substitue l'emploi de l'*équerre d'arpenteur* dont nous parlerons plus tard.

Nouvelles mesures. — L'unité de superficie adoptée est le *mètre quarré* ou le carré géométrique fait sur un mètre en longueur. Comme pour évaluer de petites surfaces cette unité est trop forte, on adopte pour celles-ci : le *centimètre quarré* ou le carré géométrique construit sur le centimètre en longueur, et le *millimètre quarré* ou le carré fait sur un millimètre en longueur. Nous avons vu comment on passait du mètre quarré à ses subdivisions. Pour l'arpentage des terres le mètre quarré est trop petit, et on évalue leurs surfaces en *ares* ou *perches métriques*, c'est un carré construit sur une longueur de 10 mètres. Il vaut par conséquent 100 mètres quarrés. Il a pour subdivision le *centiare* ou la centième partie d'un are, c'est-à-dire un mètre quarré. Ses multiples sont l'*hectare* ou *arpent métrique*, c'est-à-dire 100 ares, et le *myriare* ou 10 000 ares.

Les mesures linéaires étant prises en mètres, la surface résultant de leur produit exprimera des mètres quarrés, et pour la convertir en ares, hectares et myriares, il faudra diviser le nombre en tranches de deux chiffres de droite à gauche.

Anciennes mesures.—L'unité de superficie adoptée autrefois était la toise quarrée ou le carré géométrique construit sur la toise en longueur ; et comme celle-ci vaut 6 pieds, le pied 12 pouces, le pouce 12 lignes, il résulte que la toise quarrée

vaut 36 pieds quarrés, le pied quarré 144 pouces quarrés, le pouce quarré 144 lignes quarrées.

La toise quarrée étant une trop petite unité pour les mesures agraires, on évaluait les terrains en *perches quarrées*, de 13 toises quarrées 16 pieds quarrés : (c'est le carré géométrique construit sur une longueur de 22 pieds.) L'*arpent* valait 100 perches quarrées.

Conversion des anciennes mesures en nouvelles et réciproquement. — La toise vaut en mètres $1^{m},949$, et réciproquement un mètre vaut en toise $0^{t},513$. Par conséquent la toise quarrée vaut en mètres quarrés $3^{m^2},799$, et réciproquement un mètre quarré vant en toise quarrée $0^{t^2},263$.

Avec ces rapports il est facile d'élnder les multiplications de nombres complexes, auxquelles donne lieu la question des mesurages des surfaces. Car si les dimensions d'un rectangle, par exemple, sont données en toises, pieds, pouces, etc., nous les évaluons en toises et nous multiplions par le rapport de la toise au mètre, le résultat exprime des mètres. Nous faisons le produit des deux dimensions ainsi transformées ; il exprime des mètres quarrés, et si on veut qu'il exprime des toises quarrées et subdivisions, on multiplie la surface métrique par le rapport du mètre quarré à la toise quarrée.

Ex. Un mur en forme de rectangle a pour dimensions : $3^{t}\ 4^{pi}\ 5^{po}$ et $5^{t}\ 3^{pi}\ 8^{po}$; quelle est sa surface en toises quarrées et subdivisions de celle-ci ?

Convertissons le tout en toises : les 5 pouces valent $\frac{5}{12}$ de pied, et $4^{pi} + \frac{5^{pi}}{12} = \frac{53^{pi}}{12}$. Ce nombre de pieds converti en toises vaut 6 fois moins ou $\frac{53^{t}}{12 \times 6}$ ou $\frac{53^{t}}{72}$. Donc $3^{t} + \frac{53^{t}}{72} = \frac{269^{t}}{72}$. On trouvera de même que les $5^{t}\ 3^{pi}\ 8^{po}$ du multiplicateur valent $\frac{404}{72}$. Comme 1^{t} vaut $1^{m},949$, $\frac{269^{t}}{72}$ vaudront $\frac{269 \times 1,949}{72} = 7^{m},281$ et $\frac{404^{t}}{72}$ vaudront $\frac{404 \times 1,949}{72} = 10^{m},936$. Or, le

produit de $7^{m},281$ par $10^{m},936$ donne : $79^{m^2},625016$ ou plus simplement $79^{m^2},625$; et comme 1^{m^2} vaut $0^{t^2},263$, $79^{m^2},625$ vaudront $79,625 \times 0^{t^2},263$ ou $20^{t^2},941375$. Pour convertir la partie décimale en pieds quarrés, multiplions-la par 36, nous obtenons : $33^{pi^2},8895$; pour convertir cette partie décimale en pouces quarrés, multiplions-la par 144 ; le produit donne : $128^{po^2},088$. Si on néglige la partie décimale 0,088, nous aurons pour surface : 20^{t^2} 33^{pi^2} 128^{po^2}.

La conversion des toises quarrées en mètres quarrés s'opérerait d'une manière analogue à celle que nous avons adoptée dans la question précédente pour la conversion des toises linéaires en mètres.

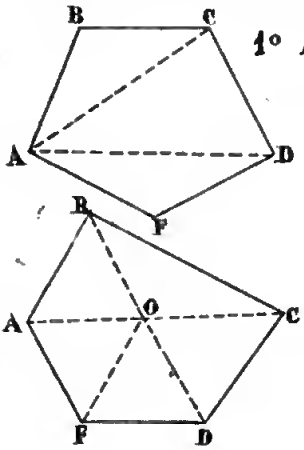
La conversion des perches quarrés en mètres quarrés s'opérera par une conversion en toises quarrées et subdivisions de celles-ci, puis on passera des toises quarrées aux mètres quarrés par le procédé précédent.

Enfin celle des mètres quarrés en perches se fera en passant de ceux-ci aux toises quarrées, puis de celles-ci aux perches quarrées.

Nous rangerons les surfaces planes en deux classes pour leur mesurage :

1° Celles qui sont limitées par des droites ou les *polygones rectilignes ;*

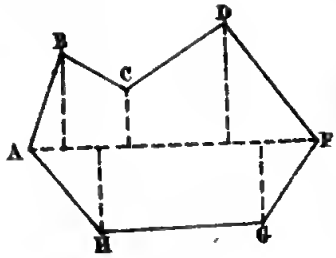
2° Celles qui sont limitées par des courbes ou des droites et des courbes ou les *polygones curvilignes.*



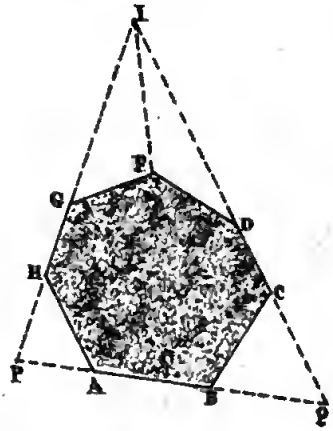
1° *Polygones rectilignes.*

1er Procédé. On peut décomposer le polygone en triangles en joignant un sommet et tous les autres, ajouter les surfaces de ces triangles.

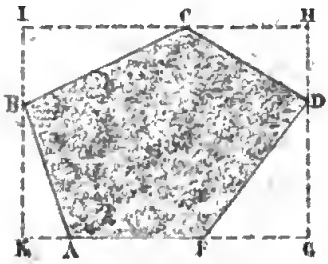
2e Procédé. On peut également décomposer le polygone en triangles en joignant tous les sommets à un point quelconque pris dans l'intérieur.



3ᵉ Procédé. On peut mener une diagonale quelconque, abaisser de chacun des sommets des perpendiculaires sur celle-ci, et ajouter les triangles et trapèzes auxquels cette construction donne lieu.

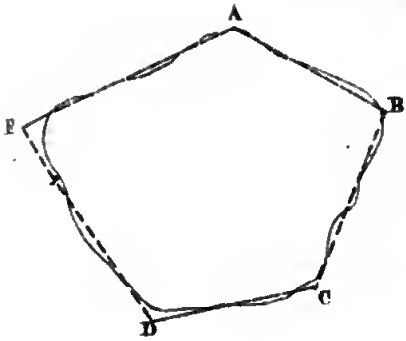


4ᵉ Procédé. Si on ne peut pénétrer dans le polygone, ou si on ne peut y prendre aucun alignement d'un sommet à l'autre comme dans l'intérieur d'un bois, par exemple, on peut prolonger les côtés de manière à former un triangle IPQ qui le contienne. On évalue la surface de celui-ci et on en retranche les triangles successifs BCQ, DFI, GFI, PAH. Mais comme on ne pourrait avoir la hauteur du grand triangle PQI, qu'en prolongeant l'un des côtés, et en menant une parallèle à cette base par le sommet opposé pour mesurer ensuite leur distance, il est bon de donner ici la formule qui sert à calculer la surface d'un triangle au moyen des trois côtés. Si nous désignons par S cette surface et par a, b, c, les trois côtés, par p le demi-contour ou $\frac{1}{2}$ *périmètre*, le calcul nous donne: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. C'est-à-dire que *la surface d'un triangle est égale à la racine quarrée du produit du demi-périmètre par celui des trois restes obtenus, en retranchant successivement chacun des côtés de ce demi-périmètre.*



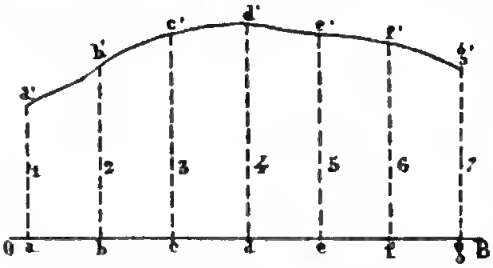
5ᵉ Procédé. Si dans les mêmes circonstances que précédemment on ne pouvait former le triangle enveloppant, on pourrait entourer le polygone d'un rectangle, en mesurer la surface et en retrancher la somme des triangles qui ne font pas partie de la surface du polygone.

2° *Polygones curvilignes.*



Si la figure polygonale est limitée par des courbes, on y substitue un polygone rectiligne. On prend pour les sommets des points voisins de changements brusques de courbure, de telle sorte que les droites qui les joignent et qui servent de côtés laissent en dehors des parcelles de surface compensant celles qu'elles enveloppent et qui ne faisaient pas partie du polygone curviligne.

Nous observerons que pour arriver assez juste à cette compensation, il faut une certaine habitude qui n'est point requise pour l'application du procédé suivant, découvert par un géomètre anglais *Thomas Sympson.*



Supposons qu'il s'agisse d'évaluer la surface comprise entre la courbe $a'g'$, la droite OB et les deux perpendiculaires aa' et gg'. Nous diviserons la distance ag en un nombre pair de parties égales, assez nombreuses pour qu'il y ait une très-petite surface comprise entre chacun des arcs de la courbe et sa corde, en chacun des points de division nous élèverons des perpendiculaires appelées *ordonnées*, et nous les numéroterons de gauche à droite. La surface est égale à $\frac{1}{3}cd\,[\,aa' + gg' + 2(\,cc' + ee'\,) + 4\,(\,bb' + dd' + ff'\,)\,]$, c'est-à-dire *au tiers du produit qu'on obtient en multipliant l'une des divisions de la droite par la somme des ordonnées extrêmes, augmentée de deux fois celle des autres ordonnées de rang impair et de quatre fois celle des ordonnées de rang pair.*

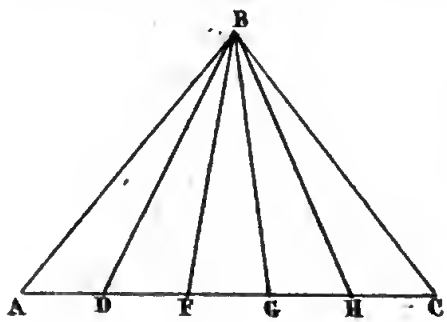
Voyez pour la démonstration de ce théorème la mécanique industrielle de Poncelet, page 187 et suivantes. Nous nous

bornerons à dire que l'on doit multiplier davantage les ordonnées dans certaines parties sinueuses de la courbe, ce qui nécessite quelquefois le partage de l'opération en plusieurs opérations distinctes. Avec cette formule on approche, dans les circonstances ordinaires, non-seulement plus de la vérité qu'en calculant la valeur des trapèzes rectilignes inscrits et limités aux ordonnées, mais même plus que si l'on calculait celle des trapèzes résultant d'ordonnées plus rapprochées d'un tiers.

PARTAGE DES TERRAINS.

Il existe sur cette théorie des procédés graphiques qui varient suivant les données de la question. Nous les considérons comme peu applicables sur le terrain, et nous nous bornerons à traiter numériquement les cinq problèmes suivants sur cette matière:

Problème 1. — *Diviser la surface d'un triangle en un certain nombre de parties équivalentes, par des droites partant du sommet et aboutissant à la base.*

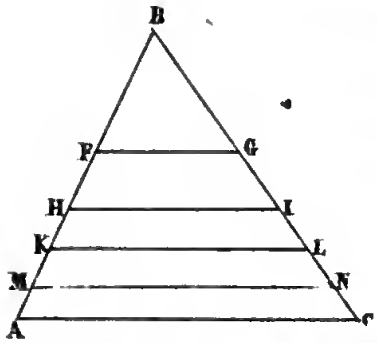


Analyse. — Supposons le triangle ABC divisé en 5 parties égales par les droites BD, BF, etc. Ces triangles ayant même hauteur, devront avoir des bases égales pour être équivalentes. Donc AC est divisée en 5 parties égales.

Synthèse. — Divisez la base en autant de parties égales que vous voulez de triangles, joignez le sommet et les points de division.

Problème 2. — *Diviser la surface d'un triangle en un certain nombre de parties équivalentes, par des parallèles à la base.*

Analyse. — Supposons le problème résolu, c'est-à-dire le triangle partagé en 5 parties équivalentes. Alors le triangle BAC et le triangle BFG qui en est la cinquième partie, auront leurs surfaces proportionnelles aux quarrés des côtés homologues. On aura

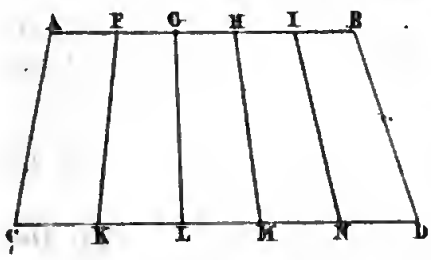


donc la proportion: $1 : 5 :: FB^2 : AB^2$ d'où $FB^2 = \frac{AB^2}{5}$ et $FB = \frac{AB}{\sqrt{5}} = \frac{AB\sqrt{5}}{5}$. Les deux triangles BHI et ABC donneront de même : $2 : 5 :: BH^2 : AB^2$, d'où $BH^2 = \frac{2AB^2}{5}$ et $BH = AB\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{AB\sqrt{10}}{5}$. On trouverait de même : $BK = \frac{AB\sqrt{15}}{5}$, $BM = \frac{AB\sqrt{20}}{5}$.

Synthèse. — Divisez la valeur numérique d'un des côtés du triangle par le nombre de parties demandées, multipliez le quotient par la racine quarrée de ce nombre de parties, vous aurez ainsi la distance du sommet B au premier point de division de la parallèle FG. Multipliez ce même quotient par la racine quarrée du double de ce nombre de parties, vous aurez la distance du point B au second point de division. Le produit par la racine quarrée du triple de ce nombre de parties vous donnera la distance du sommet B au troisième point de division, etc.

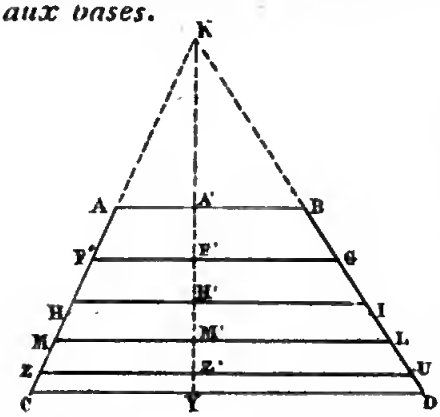
Problème 3. — *Diviser la surface d'un trapèze en un certain nombre de parties équivalentes, par des droites qui aillent d'une base à l'autre.*

Analyse. — Supposons le trapèze ainsi divisé en 5 parties équivalentes. Les hauteurs étant les mêmes, les surfaces seront évidemment équivalentes si les bases supérieures sont égales entre elles ainsi que les bases inférieures.



Synthèse. — Partagez chacune des bases en un nombre de parties égales, donné par le nombre des parts, joignez les points de division correspondants.

Problème 4. — *Partager la surface d'un trapèze en un certain nombre de parties équivalentes, par des parallèles aux bases.*



Analyse. — Si nous connaissions la surface du trapèze et celle du triangle KAB, formé par les prolongements des côtés non parallèles, en augmentant celle-ci successivement de une fois, deux fois, trois fois, quatre fois la cinquième partie du trapèze, dans le cas où on voudrait diviser sa surface en 5 parties équivalentes, nous aurions les triangles KFG, KHI, KML, KZU, dont il serait facile de calculer les hauteurs KF, KH, KM, KZ, en les comparant au triangle KAB, et par suite les distances A'F', A'H', A'M', A'Z', aux extrémités desquelles il faudrait mener les parallèles demandées.

Donnons-nous $AB = 3^m,50$, $CD = 4^m,20$ et $A'Y = 3^m$. La surface du trapèze sera : $\frac{3^m,50 + 4^m,20}{2} \times 3^m = 11^{m^2},55$.

Les deux triangles KAB et KCD ont leurs bases proportionnelles à leurs hauteurs, car ils sont semblables, et le rapport des bases est le même que celui des côtés KC, KA ; mais le rapport de ces côtés est le même que celui des perpendiculaires KY, KA' ; donc nous aurons la proportion : $CD : AB :: KY : KA'$ ou $4,20 : 3,50 :: x : x - 3$, x désignant la hauteur KY. Appliquons-y le principe suivant : la différence des deux premiers termes est au premier comme la différence des deux derniers est au troisième, elle donnera : $0,70 : 4,20 :: 3 : x$ d'où $x = \frac{3 \times 4,20}{0,70} = 18^m$. Donc $KA' = 18 - 3 = 15^m$, et le triangle KAB aura pour surface : $\frac{3,50 \times 15}{2} = 26^{m^2},25$. De plus la cinquième partie du trapèze est de $2^{m^2},31$. Les triangles successifs KFG, KHI, KML, KZU, vaudront donc : $26,25 + 2,31 = 28^{m^2},56$; $26,25 + 2 \times 2,31 = 30^{m^2},87$; $26,25 + 3 \times 2,31 = 33^{m^2},18$; $26,25 + 4 \times 2,31 = 35^{m^2},49$.

Pour avoir leurs hauteurs nous les comparons au triangle KAB, nous aurons la suite de proportions :

$$28{,}56 : 26{,}25 :: KF'^2 : KA'^2 \text{ ou } 15^2 \text{ d'où } KF' = \sqrt{\frac{28{,}56 \times 15^2}{26{,}25}},$$

$$30{,}87 : 26{,}25 :: KH'^2 : 15^2 \quad \text{d'où} \quad KH' = \sqrt{\frac{30{,}87 \times 15^2}{26{,}25}},$$

$$33{,}18 : 26{,}25 :: KM'^2 : 15^2 \quad \text{d'où} \quad KM' = \sqrt{\frac{33{,}18 \times 15^2}{26{,}25}},$$

$$35{,}49 : 26{,}25 :: KZ'^2 : 15^2 \quad \text{d'où} \quad KZ' = \sqrt{\frac{35{,}49 \times 15^2}{26{,}25}}.$$

Observons que $\frac{15^2}{26{,}25}$ est commun aux quatre valeurs, et qu'il peut sortir du radical si on en extrait la racine ; alors les égalités précédentes deviendront :

$$KF' = 2{,}92\sqrt{28{,}56} = 2{,}92 \times 5{,}34 = 15{,}5928,$$
$$KH' = 2{,}92\sqrt{30{,}87} = 2{,}92 \times 5{,}55 = 16{,}2060,$$
$$KM' = 2{,}92\sqrt{33{,}18} = 2{,}92 \times 5{,}76 = 16{,}8192,$$
$$KZ' = 2{,}92\sqrt{35{,}49} = 2{,}92 \times 5{,}95 = 17{,}3740.$$

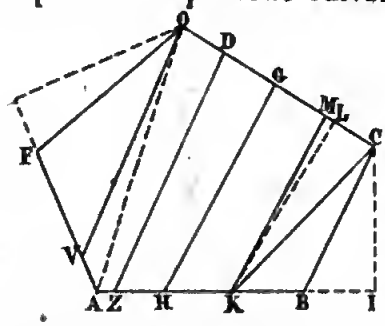
Donc on aura :

$$AF' = KF' - KA' = 15{,}5928 - 15 = 0^m{,}5928,$$
$$AH' = KH' - KA' = 16{,}2060 - 15 = 1^m{,}2060,$$
$$AM' = KM' - KA' = 16{,}8192 - 15 = 1^m{,}8192,$$
$$AZ' = KZ' - KA' = 17{,}3740 - 15 = 2^m{,}3740.$$

Synthèse. — Cherchez la hauteur du triangle formé par les prolongements des côtés non parallèles du trapèze, évaluez sa surface, évaluez également celle du trapèze ; divisez-la en autant de parties égales que l'énoncé le comporte. Ajoutez successivement une, deux, trois, etc., de ces parties à la surface du triangle. Calculez les hauteurs des triangles qui en résultent par leur similitude avec ce dernier, retranchez-en sa hauteur et portez les restes sur la hauteur du trapèze à partir de la petite base. Par les extrémités de ces restes menez des parallèles aux bases.

Problème 5. — *Partager la surface d'un polygone quelconque en un certain nombre de parties équivalentes.*

La question est indéterminée, c'est-à-dire, peut être résolue d'un grand nombre de manières, non quant à la surface numérique de chaque portion, mais quant à sa forme, nous adopterons le procédé suivant :



Evaluons la surface S du polygone et supposons qu'il s'agisse de le diviser en 5 parties équivalentes. Prenons la cinquième partie de la surface numérique. Du sommet C abaissons une perpendiculaire sur AB prolongé, puis désignant par x la base d'un triangle qui aurait pour hauteur cette perpendiculaire CI et dont la surface serait la dixième partie du polygone, la relation : $x \times \frac{CI}{2} = \frac{S}{10}$, nous indique qu'il faut diviser la dixième partie de la surface par la moitié de la hauteur pour avoir la base en question. Une fois calculée, portons-la sur BA et supposons qu'elle soit limitée en K. Abaissons de ce point une perpendiculaire sur DC, mesurons-la et divisons encore la dixième partie de la surface du polygone par la moitié de cette perpendiculaire, le quotient nous donnera la base d'un second triangle équivalent au premier. Portons-la sur CD de C en L. Le quadrilatère LCBK, se composant de deux triangles dont chacun vaut la dixième partie du polygone, en vaudra la cinquième partie. Continuons ainsi tant que faire se pourra. Si, arrivé à la droite DZ qui limite le troisième, le quadrilatère AODZ est plus petit que la cinquième partie du polygone, retranchons-en sa valeur et ajoutons-y un triangle OAV équivalent à cet excès. A cet effet abaissons du point O une perpendiculaire sur AF prolongé, mesurons-la et divisons la différence en question par la moitié de cette perpendiculaire, le quotient porté sur AF de A en V donnera la base AV de ce triangle, et le problème sera résolu.

FIN DES PROBLÈMES ET APPLICATIONS DU TROISIÈME LIVRE.

LIVRE QUATRIÈME.

DES POLYGONES.

Nous avons vu, dans le premier livre, ce qu'on entendait par polygone, qu'on distinguait deux classes de polygones: les *polygones convexes* ou à *angles saillants*, et *polygones concaves* ou à *angles rentrants*.

On désigne les uns et les autres par le nombre de leurs côtés ou de leurs angles. Ainsi on appelle :

Triangles	les polygones de	3	côtés.
Quadrilatères	—	4	—
Pentagones	—	5	—
Hexagones	—	6	—
Heptagones	—	7	—
Octogones	—	8	—
Ennéagones	—	9	—
Décagones	—	10	—
Endécagones	—	11	—
Dodécagones	—	12	—

Au-delà du dodécagone, on ne fait plus usage que des expressions : polygones de 13, 14, 16, etc., côtés, si ce n'est pour le *pentédécagone* qui est le polygone de 15 côtés.

Dans tout polygone, la somme des angles est égale à autant de fois 180° qu'il y a de côtés moins deux.

Cette propriété que nous avons démontrée pour les polygones convexes est aussi vraie pour les polygones concaves. Nous ne l'avons pas démontrée pour ce dernier cas, parce que ceux-ci sont moins employés dans les arts, à l'exception toutefois des *polygones étoilés* dont nous dirons un mot.

POLYGONES RÉGULIERS.

Les *polygones réguliers* sont des polygones convexes qui ont les angles égaux et les côtés égaux.

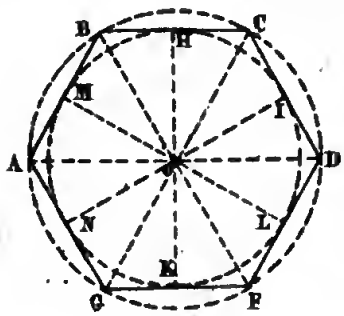
Le *triangle équilatéral* et le *carré* sont les plus simples des polygones réguliers.

THÉORÈME 1. — *Tout polygone régulier a pour mesure d'un de ses angles le quotient par le nombre des côtés, du produit de 180° par ce nombre de côtés diminué de deux.*

En effet, tout polygone a pour mesure de la somme de ses angles autant de fois 180° qu'il y a de côtés moins deux. Ils sont tous égaux, donc s'il y en a m, chacun d'eux vaudra la $m^{ème}$ partie de ce produit ou $\frac{180(m-2)}{m}$.

THÉORÈME 2. — *Tout polygone régulier est à la fois inscriptible et circonscriptible à la circonférence.*

NOTA. Un polygone est dit *inscriptible* à la circonférence quand tous ses sommets peuvent être sur la circonférence, et alors celle-ci est dite *circonscrite* au polygone. Il est dit *circonscriptible* quand tous ses côtés peuvent être tangents à la circonférence ; celle-ci à son tour est *inscrite* au polygone. Dans le premier cas le rayon de la circonférence est aussi dit le rayon du polygone ; dans le second cas le rayon de la circonférence est dit l'*apothème* du polygone.



1° Considérons en effet le polygone ABCDFG, et faisons passer une circonférence par les trois points A, B, C. Soit O son centre, joignons-

le à tous les sommets du polygone. Les deux triangles AOB et BOC sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, et comme ils sont isocèles, les angles aux bases sont tous égaux ; donc l'angle OBC est la moitié de l'angle ABC ; l'angle OCB son égal est aussi la moitié de l'angle BCD, puisque ce dernier est égal à l'angle ABC d'après la définition des polygones réguliers. Donc l'angle OCD est l'autre moitié de l'angle BCD. Il résulte de là que les deux triangles BOC et OCD auront un angle égal compris entre deux côtés égaux, savoir : les angles en C égaux, BC = CD, OC commun. Donc OD = OB. Or, OB est un rayon ; donc OD en sera un et la circonférence qui passe par les trois points A, B, C, passera par le quatrième D. On démontrerait de même que passant par les trois points B, C, D, elle passera par F et ainsi de suite.

2° Les côtés AB, BC, etc., étant des cordes égales, leurs distances au centre OM, OH, etc., sont toutes égales, et la circonférence décrite du point O comme centre avec OM pour rayon, passera par les points H, I, etc.

Corollaire 1. — Une portion de polygone régulier est inscriptible et circonscriptible à la circonférence.

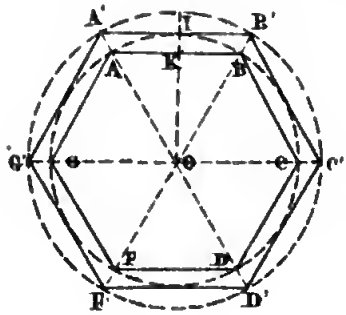
Corollaire 2. — Tous les angles au centre sont égaux et ont pour mesure le quotient de 360° par le nombre des côtés du polygone.

Théorème 3. — *Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont deux figures semblables.*

La proposition sera démontrée si nous prouvons qu'ils ont les angles égaux chacun à chacun et les côtés proportionnels. Or, d'après le théorème 1er, les angles sont égaux. Les côtés sont proportionnels puisque la suite des rapports est composée de termes identiques.

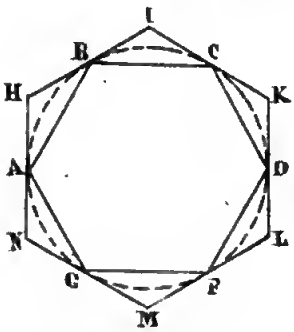
Théorème 4. — *Un polygone régulier étant inscrit dans un cercle, on peut en circonscrire un semblable.*

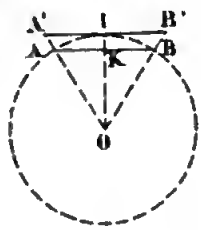
1er Procédé. Soit ABCDFG le polygone inscrit donné. Joignons le centre et tous les sommets par des rayons, et prolon-



geons-les indéfiniment. Du centre abaissons un rayon perpendiculaire à l'un des côtés AB, et par le point I menons une tangente limitée aux rayons OA, OB prolongés. Puis avec OA' pour rayon décrivons une circonférence concentrique à la circonférence donnée, le polygone A'B'C'D'F'G' résultant de la jonction des points A', B', etc., sera le polygone demandé. Car les triangles A'OB', B'OC', etc., sont tous égaux; donc tous les côtés A'B', B'C', etc., sont égaux et forment des cordes équidistantes du centre, inscrites dans la circonférence OA'. Ces côtés sont donc tous tangents à la circonférence OA. D'ailleurs les angles A', B', etc., sont égaux comme ayant même mesure. Ce polygone est donc régulier. Il a le même nombre de côtés que le polygone proposé. Donc il lui est semblable.

2e Procédé. Menons en chaque sommet A, B, C, etc., des tangentes, le polygone HIKLMN résultant de leurs points d'intersection sera le polygone demandé. Car les triangles BIC, CKD, etc., sont tous égaux comme ayant un côté égal adjacent à des angles égaux, savoir : BC = CD = etc., comme côtés du polygone proposé; les angles en B, C, D, etc., égaux comme ayant même mesure. Donc les angles I, K, etc., sont égaux; ces mêmes triangles sont isocèles comme ayant leurs angles aux bases égaux; donc BI double de HI est égal à IK double de IC, et ainsi des autres *.





* On peut se proposer de calculer le côté du nouveau polygone au moyen de celui du premier et du rayon du cercle.

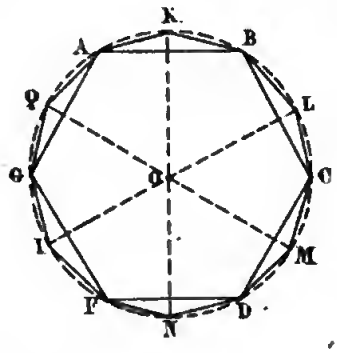
Soient c le côté donné, R le rayon et C le côté cherché. La similitude des triangles AOB, A'OB',

Corollaire. — Il résulte de là que, réciproquement, pour inscrire dans une circonférence un polygone semblable à un polygone circonscrit donné, on peut suivre aussi deux procédés :

1er Procédé. Joignez le centre à tous les sommets du polygone donné et joignez, en suivant le contour, les points de rencontre de ces rayons avec la circonférence.

2e Procédé. Joignez, en suivant le contour, les points de contact des côtés du polygone proposé *.

THÉORÈME 5. — *Un polygone régulier étant inscrit dans un cercle, on peut toujours en inscrire un autre qui ait deux fois plus de côtés.*



Abaissons du centre des rayons perpendiculaires sur tous les côtés du polygone donné, et joignons leurs points de rencontre aux extrémités du côté correspondant. Le nouveau polygone aura le double de côtés, et sera régulier ; car les côtés sont égaux

---

nous donne :

$$OK : R :: c : C;$$

mais $OK = \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}$ à cause du triangle rectangle AOK, la proportion devient donc :

$$\sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} : R :: c : C,$$

d'où

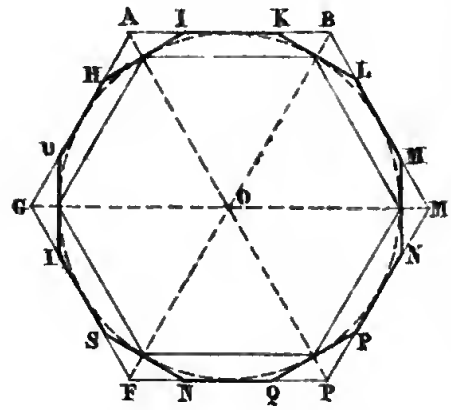
$$C = \frac{2R \times c}{\sqrt{4R^2 - C^2}} \quad \text{ou bien} \quad C = \frac{2Rc\sqrt{4R^2 - c^2}}{4R^2 - c^2}.$$

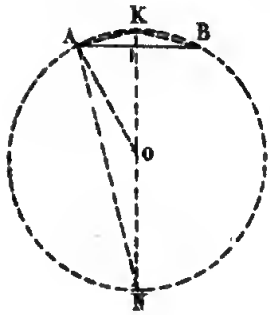
* Pour avoir le côté du polygone inscrit au moyen du rayon et du côté du polygone circonscrit donné, il suffit de dégager c de la proportion de la note précédente, et on trouve :

$$c = \frac{2RC}{\sqrt{4R^2 + C^2}} \quad \text{ou bien} \quad \frac{2RC\sqrt{4R^2 + C^2}}{4R^2 + C^2}.$$

comme cordes sous-tendant des arcs égaux, et les angles sont égaux comme ayant même mesure *.

Scholie. — Pour circonscrire à une circonférence un polygone régulier qui ait deux fois plus de côtés qu'un autre donné, il faudra joindre le centre et tous les sommets du polygone donné, puis mener des tangentes à la circonférence en chacun des points de rencontre avec celle-ci. Le polygone HIKL... qui résultera de cette construction, sera le polygone demandé. Car si on considère le polygone inscrit semblable





* Il peut être utile de calculer le côté du nouveau polygone au moyen de celui du premier et du rayon du cercle.

Joignons AO, menons le diamètre KN et la corde AN. Le triangle rectangle KAN donne AK moyen proportionnel entre l'hypothénuse ou le diamètre et sa projection sur celui-ci. Nous aurons donc, en appelant c le côté cherché, C le côté donné et R le rayon :

$$c^2 = 2R \times KI;$$

mais $KI = R - OI$ et $OI = \sqrt{R^2 - \frac{C^2}{4}}$ ou $\frac{\sqrt{4R^2 - C^2}}{2}$. En résumé :

$$c^2 = 2R\left(R - \frac{\sqrt{4R^2 - C^2}}{2}\right)$$

ou toute réduction faite

$$c = \sqrt{R\left(2R - \sqrt{4R^2 - C^2}\right)}.$$

Si à l'inverse on voulait la valeur de AB au moyen de AK et du rayon, c'est-à-dire la corde d'un arc double au moyen de la corde de l'arc et du rayon, il suffirait de dégager C dans l'équation précédente. On trouve alors :

$$C = \sqrt{\frac{4R^2c^2 - c^4}{R^2}} = c\sqrt{4 - \frac{c^2}{R^2}}.$$

au proposé, puis celui d'un nombre double de côtés, le polygone en question sera disposé, par rapport à ce dernier, comme le prescrit le second procédé du théorème précédent*.

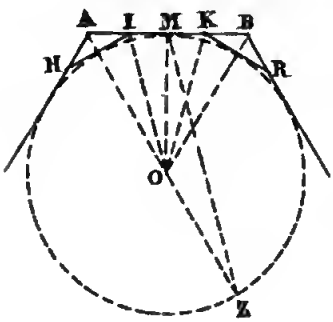
Théorème 6. — *On peut considérer le cercle comme un polygone régulier d'un nombre infini de côtés infiniment petits.*

Car si l'on inscrit dans une circonférence un polygone régulier quelconque, et si on lui circonscrit un polygone semblable; puis, qu'on considère une série de polygones réguliers qui aient deux fois plus de côtés que les précédents,

---

* On peut aussi calculer le côté du nouveau polygone au moyen du rayon du cercle et du côté du polygone donné.

A cet effet opérons comme il est dit dans le scholie. Joignons le centre et le point I; prolongeons AO jusqu'en Z; abaissons du centre la perpendiculaire OM sur AB; joignons ZM. Cette droite est parallèle à OI à cause des angles correspondants égaux O et Z. Appelons C′ le côté donné, R le rayon et c' le côté cherché. Le triangle AZM donnera :



$$AI : IM :: AO : R,$$

d'où

$$AI + IM : 2IM :: AO + R : 2R$$

on bien

$$\frac{C'}{2} : c' :: AO + R : 2R;$$

mais $AO = \sqrt{R^2 + \frac{C'^2}{4}}$, substituant cette valeur dans la proportion et dégageant c', il vient :

$$c' = \frac{2RC'}{2R + \sqrt{4R^2 + C'^2}},$$

ou en multipliant les deux termes par la différence des deux termes du dénominateur :

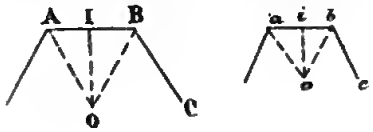
$$c' = 2R\left(\frac{\sqrt{4R^2 + C'^2} - 2R}{C'}\right).$$

Si on voulait avoir C′ au moyen de c' et de R, il faudrait dégager C′ de la proportion précédente, on trouverait alors :

$$C' = \frac{8R^2c'}{4R^2 - c'^2}.$$

la surface et le périmètre des polygones inscrits augmenteront, et quand les côtés seront assez petits pour se confondre avec leurs arcs sous-tendus, l'apothème se confondra avec le rayon de la circonférence. La surface et le périmètre des polygones circonscrits diminueront, et leur rayon finira par se confondre avec celui de la circonférence.

Théorème 7.—*Les périmètres de deux polygones réguliers semblables sont entre eux comme leurs rayons ou leurs apothèmes et les surfaces comme les quarrés de ces mêmes rayons ou de ces mêmes apothèmes.*



1° Soient ABC... et *abc*... les deux polygones, OA et *oa* leurs rayons, OI et *oi* leurs apothèmes. Nous avons vu, dans le troisième livre, que de la similitude de ces polygones on pouvait conclure la proportionnalité de leurs périmètres avec leurs côtés homologues; nous aurons donc déjà, en désignant par P le périmètre du grand et *p* celui du petit: $P : p :: AB : ab$. Mais les deux triangles AOB, *aob* sont semblables comme isocèles ayant un angle égal $O = o$. Donc leurs côtés homologues et leurs hauteurs sont proportionnels, nous aurons donc: $AB : ab :: AO : ao :: OI : oi$. Cette suite de rapports a un rapport commun avec la proportion précédente, et on conclura:

$$P : p :: AO : ao :: OI : oi.$$

2° De la similitude des polygones on conclut, dans le troisième livre, la proportionnalité de leurs surfaces aux quarrés des côtés homologues; nous aurons donc, en désignant par S la surface du grand et *s* la surface du petit: $S : s :: AB^2 : ab^2$. Les deux triangles AOB, *aob* ont donné précédemment: $AB : ab :: AO : ao :: OI : oi$, et en élevant tous ces rapports au quarré, il vient: $AB^2 : ab^2 :: AO^2 : ao^2 :: OI^2 : oi^2$. Le rapport $AB^2 : ab^2$ est commun à cette suite et à la proportion précédente, on aura donc: $S : s :: AO^2 : ao^2 :: OI^2 : oi^2$.

Corollaire. — Les circonférences sont proportionnelles à

leurs rayons ou à leurs diamètres, et les cercles sont proportionnels aux quarrés de leurs rayons ou de leurs diamètres.

Car les cercles peuvent être considérés comme des polygones réguliers semblables d'un nombre infini de côtés dont les rayons et apothèmes se confondent.

Nous aurons donc, en appelant C la grande circonférence, R son rayon, D son diamètre; c la petite, r son rayon, d son diamètre : $C : c :: R : r$. On peut doubler les deux termes du second rapport, et il vient :

$$C : c :: 2R : 2r \text{ ou } :: D : d.$$

S désignant la surface du grand cercle, s celle du petit, nous pouvons poser : $S : s :: R^2 : r^2$; quadruplant les deux termes du second rapport, et observant que $4R^2$ est le quarré de 2R ou de D, il vient :

$$S : s :: 4R^2 : 4r^2 \text{ ou } :: D^2 : d^2.$$

Théorème 8. — *La circonférence a pour mesure de son contour le produit de son diamètre par le rapport constant de toute circonférence à son diamètre.*

Il résulte de la première partie du corollaire du théorème précédent, que si l'on connaissait le périmètre de la circonférence qui a pour diamètre l'unité linéaire, on pourrait déterminer celui de toute autre, pourvu qu'on en connaisse le diamètre. Car en appelant π (lettre grecque qu'on prononce *pi*) la première, C la seconde et R son rayon, on aurait : $C : \pi :: 2R : 1$, proportion dans laquelle C serait la seule inconnue et qui donnerait : $C = \pi \times 2R$; cette formule nous apprend déjà que toute circonférence a pour mesure le périmètre de la circonférence qui a l'unité pour diamètre, multiplié par son diamètre. Pour substituer à cet énoncé celui du théorème, il suffit de prouver que le périmètre de la circonférence qui a l'unité pour diamètre est numériquement égal au nombre abstrait qui exprime le rapport de toute circonférence à son diamètre. Or, si de la proportion précédente nous tirons la valeur de π, nous trouvons : $\pi = \frac{C}{2R}$, ce qu'il fallait démontrer.

Un grand nombre de géomètres se sont occupés de la valeur numérique de π. Legendre a prouvé que ce nombre et son quarré sont incommensurables. On ne peut donc l'obtenir que par approximation ; $\pi = 3,1415926536$ à un dix-billionnième près en moins. Archimède l'a trouvé égal à $\frac{22}{7}$ à deux millièmes près en moins. Métius donne $\frac{355}{113}$, il est approché à un demi-millionnième *.

Corollaire. — Réciproquement si on a la longueur d'une circonférence, on obtiendra son diamètre en la divisant par ce rapport.

---

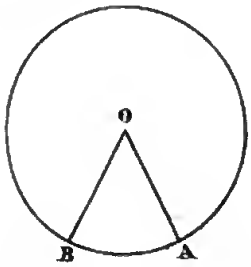
* Le rapport de Métius est facile à retenir, en observant que si l'on écrit le numérateur à la suite du dénominateur, le résultat 113355 se compose de chacun des nombres impairs consécutifs 1, 3, 5 répétés deux fois.

Aperçu de la manière dont on peut calculer le rapport de la circonférence à son diamètre à une fraction décimale 0,1, 0,01, 0,001, *etc., près.*

Nous avons vu qu'en inscrivant et circonscrivant à une circonférence deux polygones réguliers semblables, puis passant à des polygones d'un nombre double de côtés, ceux-ci s'approchaient de plus en plus de la circonférence. Celle-ci a donc un périmètre compris entre ceux des deux polygones réguliers primitifs et de leurs dérivés. Il résulte de là que si l'on inscrit, par exemple, un hexagone régulier dans la circonférence dont le diamètre est 1, auquel cas le côté vaudra $\frac{1}{2}$ comme on le verra plus tard ; qu'on en déduise le côté de l'hexagone circonscrit par la formule exposée dans la première note du théorème 4 ; que de ceux-ci on déduise les côtés et par suite les périmètres des dodécagones inscrits et circonscrits, et ainsi de suite, au moyen des formules des notes du théorème 5, jusqu'à ce qu'on arrive à deux polygones l'un inscrit et l'autre circonscrit dont les trois premières décimales soient les mêmes (s'il est question du rapport approché à 0,001), on pourra conclure que les deux périmètres ne diffèrent pas de 0,001. Donc en prenant pour la circonférence l'un ou l'autre de ces deux périmètres on ne se trompera pas de 0,001, puisqu'elle diffère de l'un d'eux d'une quantité moindre que leur différence.

Toutefois ce calcul est moins facile qu'on n'est tenté de le penser, parce que les valeurs irrationnelles de ces périmètres doivent être poussées à un degré d'approximation suffisant pour que la combinaison des erreurs, résultant des décimales négligées, n'amène pas d'autres erreurs qui influent sur les millièmes dans l'hypothèse d'une approximation à un millième près. Nous pourrions néanmoins donner à cet égard une méthode facile et indépendante de notions

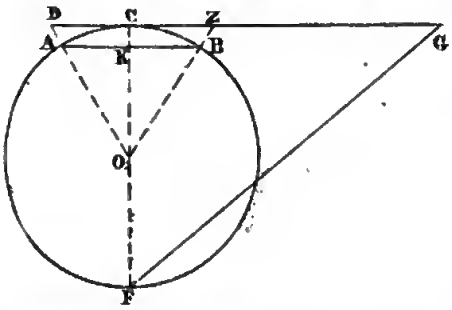
THÉORÈME 9. — *Tout arc a pour mesure de son contour le produit de la circonférence par le rapport de son indication à 360°.*



Considérons l'arc AB par exemple, l'angle au centre correspondant. Les angles au centre ayant pour mesure les arcs compris entre leurs côtés, et les indications de ces arcs étant évidemment proportionnelles à leurs contours, quand ils appartiennent à une même circonférence, nous aurons la proportion : $x : 2\pi R :: \text{arc} : 360°$, x désignant le contour de l'arc AB, et R le rayon de la circonférence. On tire de là $x = \frac{2\pi R \times \text{arc}}{360°}$. On évaluera donc l'arc en degrés, minutes, etc., au moyen du rapporteur ; on prendra son rapport à 360°, ce qui se fera en réduisant cet arc et 360° en unités de la plus petite espèce de l'arc et divisant les deux résultats de cette conversion l'un par l'autre avec approximation en dé-

---

sur l'évaluation des erreurs qui peuvent affecter les résultats de la combinaison des nombres approchés. Mais nous sortirions de notre cadre.



Il n'y a pas de moyen connu en Géométrie pour *rectifier* la circonférence, c'est-à-dire, pour obtenir une droite *exactement* égale à cette circonférence. On n'a à sa disposition que des procédés approximatifs. En voici un assez simple :

Inscrivez dans la circonférence une corde égale au rayon ; abaissez le diamètre FC perpendiculaire à cette corde, et menez au point C une tangente terminée au prolongement du rayon OA. Portez, à partir de D, trois fois le rayon sur cette tangente, joignez FG. Cette droite sera égale à la demi-circonférence à une approximation de $\frac{3}{100000}$ du diamètre.

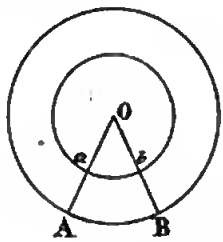
La formule de la première note du théorème 4, donne pour DZ :

$$DZ = \frac{2R\sqrt{3}}{}\,;$$

cimales, puis on multipliera ce rapport par la longueur de la circonférence.

Corollaire. — Deux arcs de cercle semblables sont entre eux comme leurs rayons ou leurs diamètres.

Nota. On appelle *arcs semblables* ceux qui, appartenant à des cercles de rayons différents, correspondent au même angle au centre.



En effet, si R est le rayon de la grande circonférence et r celui de la petite. Le grand arc AB aura pour contour : $AB = \frac{2\pi R \times \text{arc}}{360}$, et le petit arc aura : $ab = \frac{2\pi r \times \text{arc}}{360}$, d'où

$$AB : ab :: \frac{2\pi R \times \text{arc}}{360} : \frac{2\pi r \times \text{arc}}{360} \text{ ou bien } :: 2R : 2r \text{ ou enfin } :: R : r.$$

Théorème 10. — *La surface d'un polygone régulier est égale à la moitié du produit de son périmètre par l'apothème.*

Car si l'on joint le centre et les sommets, on forme autant

---

donc CG ou $3R - \frac{DZ}{2}$ vaudra :

$$3R - \frac{R\sqrt{3}}{3} \quad \text{ou} \quad R\left(\frac{9-\sqrt{3}}{3}\right).$$

Le triangle rectangle FCG donne :

$$FG = \sqrt{4R^2 + R^2\left(\frac{9-\sqrt{3}}{3}\right)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{R\sqrt{120-18\sqrt{3}}}{3} = R \times 3{,}1415333.$$

Donc

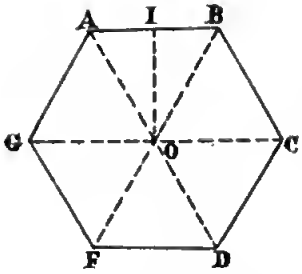
$$\frac{FG}{R} \quad \text{ou} \quad \frac{2FG}{2R} = 3{,}1415333.$$

Mais, en désignant par C la circonférence, on a :

$$\frac{C}{2R} = 3{,}1415926.$$

Les deux seconds membres de ces égalités sont sensiblement égaux. Les deux premiers le seront donc aussi, et on aura :

$$\frac{C}{2R} = \frac{2FG}{2R} \quad \text{d'où} \quad C = 2FG.$$



de triangles égaux qu'il y a de côtés dans le polygone. Chacun d'eux a pour mesure $\frac{AB \times OI}{2}$ et comme il y en a 6 dans la figure, la surface totale sera : $\frac{6AB \times OI}{2}$; mais 6AB donne le périmètre ABC... La formule deviendra donc : $\frac{\text{Périmètre ABC...} \times OI}{2}$.

Théorème 11. — *La surface d'un cercle est égale au produit du rapport de la circonférence à son diamètre par le quarré du rayon, ou par le quart du quarré du diamètre.*

Car le cercle peut être considéré comme un polygone régulier d'un nombre infini de côtés infiniment petits, dont l'apothème se confond avec le rayon. Il aura donc aussi pour mesure la moitié du produit de son périmètre ou de la circonférence par le rayon, c'est-à-dire : $\frac{2\pi R \times R}{2}$ ou πR^2.

En appelant D le diamètre, on a : $R = \frac{D}{2}$, d'où $R^2 = \frac{D^2}{4}$.

Donc si dans la formule πR^2, on remplace R^2 par $\frac{D^2}{4}$, elle deviendra : $\frac{\pi D^2}{4}$.

Théorème 12. — *Un secteur a pour mesure de sa surface le produit de la surface du cercle par le rapport de son arc à 360°.*

Nota. On appelle *secteur* la surface comprise entre deux rayons et l'arc qu'ils limitent.

Car on peut considérer l'arc comme une portion du périmètre d'un polygone régulier d'un nombre infini de côtés infiniment petits, et le secteur comme une portion de sa surface. Celle-ci aura pour mesure, d'après les mêmes con-

sidérations que dans le théorème précédent, le produit de l'arc rectifié par la moitié du rayon ou

$$\frac{2\pi R \times \text{arc}}{360} \times \frac{R}{2} \text{ ou } \frac{\pi R^2 \times \text{arc}}{360}.$$

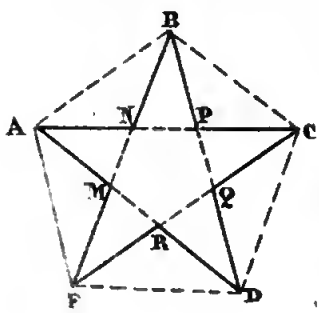
Corollaire.— Les secteurs semblables sont entre eux comme les quarrés des rayons ou des diamètres.

Nota. On appelle *secteurs semblables* ceux qui correspondent à des angles au centre égaux. .

En appelant S la surface du grand, s celle du petit, R et r les rayons correspondants, on aura, d'après ce qui précède : $S = \frac{\pi R^2 \times \text{arc}}{360}$ $s = \frac{\pi r^2 \times \text{arc}}{360}$, d'où $S : s :: \frac{\pi R^2 \times \text{arc}}{360} : \frac{\pi r^2 \times \text{arc}}{360}$ ou bien $:: R^2 : r^2$ ou enfin $:: 4R^2 : 4r^2$. Mais, en appelant D et d les diamètres, $D = 2R$ et $d = 2r$, d'où $D^2 = 4R^2$ et $d^2 = 4r^2$, le rapport $4R^2 : 4r^2$ est donc le même que $D^2 : d^2$.

DES POLYGONES ÉTOILÉS.

On appelle *polygones étoilés* ceux qui ont successivement un angle saillant et un angle rentrant. Ils sont dits réguliers lorsque les angles saillants sont égaux et les angles rentrants aussi. Ex. Le polygone ANBPCQDRFM dans lequel on a : A = B = C = D = F et M = N = P = Q = R. Nous ne parlerons que de ceux-là.



Ils peuvent se déduire des polygones réguliers convexes soit *par extension* soit *par réduction*.

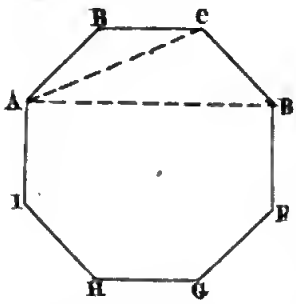
On les obtient par extension en prolongeant les côtés de deux en deux, ou de trois en trois, etc. Ex. Le polygone ANBPCQDRFM, dont les côtés sont obtenus par les prolongements de deux en deux des côtés du polygone régulier MNPQR. Il est facile de démontrer l'égalité des côtés, des angles saillants et des angles rentrants de ce polygone étoilé.

On les obtient par réduction en joignant les sommets de

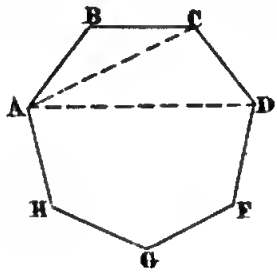
deux en deux, de trois en trois, etc. Ex. Le même polygone étoilé considéré comme dérivé du pentagone convexe ABCDF. Il est également très-facile de démontrer qu'il est régulier.

On peut former autant de polygones étoilés par extension que par réduction, en les faisant dériver d'un polygone convexe donné. Car, en formant tous les polygones étoilés par réduction d'un polygone donné, les sommets des angles rentrants de ceux-ci forment des polygones convexes de même nom que le proposé desquels ces mêmes polygones étoilés sont dérivés par extension; et réciproquement en joignant les sommets des angles saillants des polygones étoilés par extension d'un polygone donné, on obtient des polygones convexes de même nom que le proposé, desquels ces mêmes polygones étoilés sont dérivés par réduction.

Théorème 13. — *Un polygone convexe a autant de polygones étoilés par réduction et par conséquent par extension, qu'il y a d'unités dans la moitié du nombre des côtés, diminué de quatre s'il est pair, et diminué de trois s'il est impair.*



1° Car autant on peut tracer de diagonales inégales en joignant un sommet et les autres dans ce polygone, autant on peut former de polygones étoilés par réduction. Or, on les a toutes dans la moitié du polygone, et il y en a toujours deux de moins que de côtés dans cette moitié. On en aura donc un nombre marqué par $\frac{n}{2} - 2 = \frac{n-4}{2}$; n désignant le nombre des côtés du polygone.



2° Même considération que précédemment. Mais, dans ce cas, on obtient autant de diagonales différentes que si le polygone avait un côté de plus, parce que la diagonale qui joint le

premier sommet à celui d'un rang marqué par la moitié plus un du nombre des côtés donne encore lieu à un polygone étoilé. Or, si on applique à $n + 1$ le théorème précédent, on aura : $\frac{n+1}{2} - 2 = \frac{n+1-4}{2} = \frac{n-3}{2}$.

En appliquant ces deux formules aux polygones réguliers successifs, on trouve les résultats suivants :

Le triangle équilatéral n'a pas de polygone étoilé.

Le carré non plus.

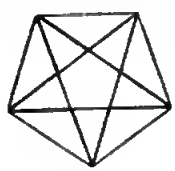
Le pentagone n'en a qu'un : $\frac{5-3}{2} = 1$.

L'hexagone n'en a qu'un : $\frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

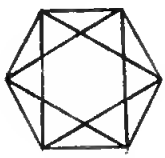
L'heptagone en a deux : $\frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

L'octogone en a deux : $\frac{8-4}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

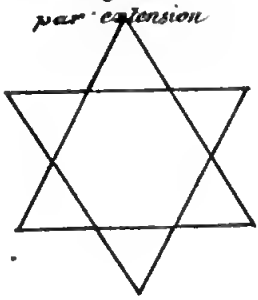
Pour quelques-uns, tels que l'hexagone, l'octogone, etc., il faut, pour tracer les diagonales, prendre plus d'un point de départ.



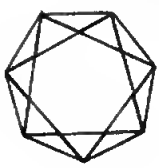
Hexagone
par réduction.

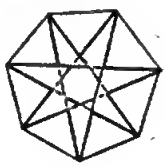


Hexagone
par extension

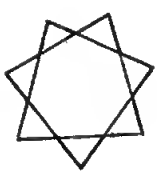


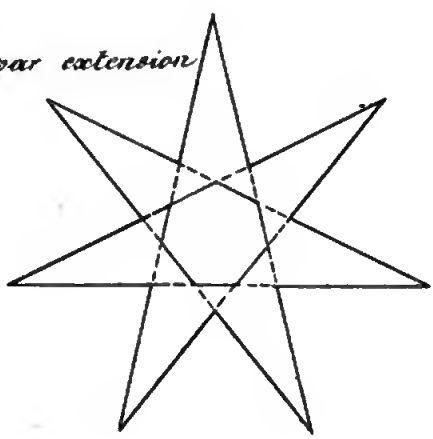
Heptagones par réduction





Heptagones par extension





EXERCICES SUR LE QUATRIÈME LIVRE.

1. Construire un octogone régulier dont le côté soit de $1^m,50$, au moyen du rapporteur. Circonscrire une circonférence à cet octogone, puis en inscrire une.

2. Inscrire dans une circonférence d'un rayon de $1^m,70$ un hexagone régulier, au moyen du rapporteur. En déduire le tracé de l'hexagone régulier circonscrit (deux procédés).

Nota. Les élèves qui savent l'algèbre mesureront le côté de l'hexagone inscrit et déduiront par le calcul, de sa valeur numérique et de celle du rayon, le côté de l'hexagone circonscrit.

3. Construire un hexagone régulier dont le côté soit de $2^m,20$, au moyen du rapporteur. Y inscrire une circonférence et en déduire le tracé de l'hexagone régulier inscrit (deux procédés).

Nota. Les élèves qui savent l'algèbre mesureront le rayon de la circonférence et déduiront de sa valeur numérique et de celle du côté donné, le côté de l'hexagone inscrit.

4. Inscrire dans une circonférence d'un rayon de $1^m,70$ un ennéagone régulier, au moyen du rapporteur. En déduire le tracé du polygone régulier inscrit de 18 côtés.

Nota. Valeur numérique du côté de celui-ci au moyen du rayon et du côté de l'ennéagone.

5. Construire un ennéagone régulier dont le côté ait $1^m,25$, au moyen du rapporteur. Y inscrire une circonférence, en déduire le tracé du polygone régulier de 18 côtés circonscrit à cette circonférence.

Nota. Valeur numérique de son côté déduite par le calcul, de celles du rayon et du côté du polygone circonscrit donné.

6. De deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés, l'un a pour périmètre $25^m,60$, l'autre $30^m,50$; l'apothème du premier est $2^m,25$, on demande celui du second.

7. De deux polygones réguliers semblables, l'un a pour apothème 3^m, l'autre $4^m,50$; le périmètre du premier est $60^m,80$, on demande celui du second.

8. Deux polygones réguliers semblables ont pour surfaces: l'un $10^{m^2},50$, et l'autre $30^{m^2},50$; l'apothème du premier est $2^m,30$, on demande celui du second.

9. Deux polygones réguliers semblables ont pour apothèmes: l'un $2^m,10$, l'autre $3^m,15$; la surface du premier est $30^{m^2},25$, on demande celle du second.

10. Tracer une circonférence qui ait pour rayon $2^m,25$. Calculer son contour.

11. On demande le rayon d'une circonférence qui a pour contour $60^m,25$.

12. Marquer, sur la circonférence du n° 10, un arc de 30° 25′ 10″ (ancienne mesure). Calculer son contour.

13. Quelle est l'indication en degrés et subdivisions de degrés, d'un arc qui a pour contour $10^m,25$ et qui a pour rayon $9^m,35$.

14. On demande le rayon d'un arc qui a pour indication 40° 25′ 15″ (ancienne mesure) et pour longueur $20^m,10$.

15. Tracer un cercle d'un rayon de $1^m,80$. Calculer sa surface.

16. Quel est le rayon d'un cercle qui a pour surface $5^{m^2},60$.

17. On demande la surface d'un secteur pris sur la circonférence du n° 15, et dont l'arc serait de 60° 25′.

18. Quelle serait l'indication en degrés et subdivisions, d'un secteur qui a pour surface $3^{m^2},25$ et pour rayon $1^m,50$.

19. Quel serait le rayon d'un secteur qui aurait pour surface $6^{m^2},60$ et pour indication 20° 8′ 13″.

20. Tracer tous les polygones étoilés par réduction et par extension du décagone régulier.

FIN DES EXERCICES DU QUATRIÈME LIVRE.

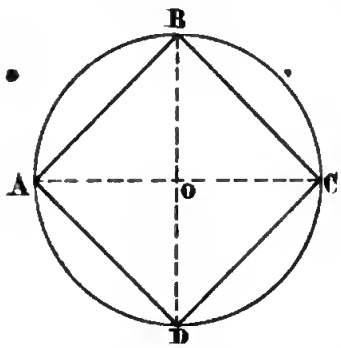
PROBLÈMES DU QUATRIÈME LIVRE.

Le théorème 1 donne le moyen de construire un polygone régulier dont on donne le côté et le nombre des côtés. Pour cela on cherche en vertu de ce théorème la somme des angles aux sommets, on la divise par le nombre des côtés et on a la valeur de chacun des angles. On le construit alors par cheminement au moyen de *la règle et du rapporteur.*

Le corollaire 2 du théorème 2 donne le moyen d'inscrire, dans une circonférence d'un rayon donné, un polygone régulier d'un nombre de côtés donné. A cet effet on divise 360° par le nombre des côtés, le quotient donne la valeur de chaque angle au centre, et on peut construire alors le polygone au moyen de *la règle et du rapporteur.* C'est par ces deux moyens qu'on a dû exécuter les tracés 1 et 2 des exercices.

Mais il y a quelques polygones qu'on peut tracer à l'aide de *la règle et du compas* sans le secours du rapporteur. Les voici :

Problème 1. — *Inscrire un carré dans un cercle.*



Analyse. — Supposons pour le moment le carré inscrit et soit ABCD. Chaque côté sous-tendra des arcs égaux, et la circonférence sera divisée en quatre parties égales. Les deux diamètres perpendiculaires AC, BD opéreront cette division.

Synthèse. — Tracez deux diamètres perpendiculaires et joignez leurs extrémités.

Corollaire. — On déduit de l'inscription du carré, celle de l'octogone et des polygones de 16, 32, etc., et en général de ceux dont le nombre des côtés est une puissance de 2. Le moyen consiste à doubler le nombre des côtés des polygones successifs en partageant en deux parties égales chacun des arcs sous-tendus.

Scholie. — *Le côté du carré inscrit est égal au rayon de la circonférence multiplié par* $\sqrt{2}$.

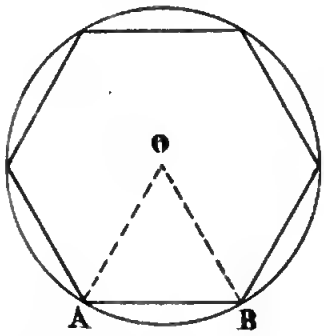
Car le triangle rectangle ABO donne : $AB^2 = 2AO^2$, d'où $AB = R\sqrt{2}$ (en désignant AO par R).

Réciproquement *le rayon de la circonférence est égal à la moitié du côté du carré multiplié par* $\sqrt{2}$.

Car de la formule $AB = R\sqrt{2}$ on tire : $R = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{AB}{2}\sqrt{2}$.

Ces deux formules permettent de calculer le côté du carré quand on connaît le rayon et réciproquement.

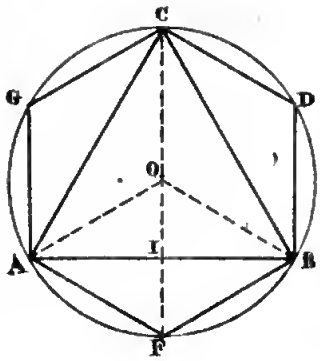
Problème 2. — *Inscrire un hexagone régulier dans un cercle.*



Analyse. — Soit AB le côté du polygone demandé. Joignons le centre et les extrémités A et B. L'angle O aura pour mesure $\frac{360°}{6}$ ou 60°. La somme des angles A et B est donc de 180° — 60° ou 120°, et comme le triangle est isocèle à cause des rayons égaux OA, OB, chacun vaudra la moitié de 120° ou 60°. Donc les angles du triangle sont tous égaux, le triangle est équilatéral et AB est égal au rayon.

Synthèse. — Portez six fois le rayon sur la circonférence et vous retomberez au point de départ. Le polygone résultant sera le polygone demandé.

Corollaire 1. — On déduit de l'inscription de l'hexagone,



celle du triangle équilatéral en joignant les sommets de deux en deux, et en général ceux dont le nombre des côtés est donné par la formule 3×2^n (n étant un nombre entier quelconque), en doublant le nombre des côtés de l'hexagone.

Scholie 1.—*Le côté du triangle équilatéral inscrit est égal au produit du rayon par la racine quarrée de* 3.

Car la figure AOBF est une losange, et comme dans une losange les diagonales se coupent à angles droits, le triangle OIB est rectangle. Donc on aura : $OB^2 = OI^2 + IB^2$. Or, OB est le rayon R, OI est la moitié de OF ou $\frac{R}{2}$; donc $OI^2 = \frac{R^2}{4}$, $IB = \frac{AB}{2}$, d'où $IB^2 = \frac{AB^2}{4}$; remplaçant OB^2, OI^2 et IB^2 par leurs valeurs, nous aurons : $R^2 = \frac{R^2 + AB^2}{4}$, d'où $4R^2 = R^2 + AB^2$, par suite $4R^2 - R^2 = AB^2$, enfin $3R^2 = AB^2$, ce qui donne en extrayant la racine $AB = R\sqrt{3}$.

Réciproquement *le rayon est égal au tiers du côté du triangle équilatéral multiplié par la racine quarrée de* 3.

Car de la relation précédente on tire : $R = \frac{AB}{\sqrt{3}}$, qui donne : $\frac{AB\sqrt{3}}{3}$.

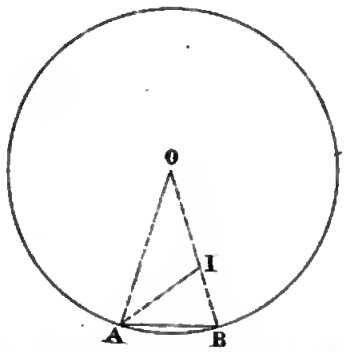
Scholie 2. — *La surface du triangle équilatéral est égale au quart du produit du quarré du côté par la racine quarrée de* 3.

Car le triangle équilatéral a pour surface le produit de son périmètre par la moitié du rayon du cercle inscrit, et comme ce rayon est la moitié de OF qui vient d'être trouvé égal à $\frac{AB\sqrt{3}}{3}$, sa moitié sera le quart de OF ou $\frac{AB\sqrt{3}}{12}$. Par

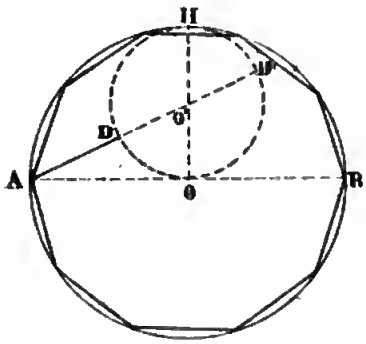
conséquent, en désignant par S la surface, on aura :

$$S = 3AB \times \frac{AB\sqrt{3}}{12} = \frac{3AB^2\sqrt{3}}{12} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}.$$

Problème 3. — *Inscrire un décagone régulier dans un cercle.*



Analyse. — Soit AB le côté du décagone. Joignons le centre aux points A et B. L'angle O aura pour mesure $\frac{360°}{10} = 36°$. La somme des angles A et B sera de $180° - 36° = 144°$; et comme le triangle est isocèle, chacun d'eux en vaudra la moitié ou 72° ; c'est-à-dire que chacun des angles à la base est double de l'angle au sommet. Menons la bissectrice AI de l'angle A. Alors l'angle IAB vaut 36°, l'angle B est d'ailleurs commun aux deux triangles AIB et AOB ; il résulte de là qu'ils sont semblables, et nous donnent la proportion : OB : AB :: AB : IB. De la similitude des mêmes triangles on conclut que le triangle AIB est isocèle puisque le triangle AOB l'est. Donc AB = AI. De plus, le triangle AIO est aussi isocèle à cause des angles égaux O et OAI. Donc AI = IO. Par conséquent AB = OI. Mettant OI au lieu de AB dans la proportion précédente, elle deviendra : OB : OI :: OI : IB. C'est-à-dire que OI ou son égal AB est la plus grande partie du rayon divisé en moyenne-extrême raison.



Synthèse.—Tracez le diamètre AB, menez le rayon OH perpendiculaire. Sur ce rayon comme diamètre décrivez une circonférence. Joignez l'extrémité A de AB au centre O', et AD sera le côté cherché. Car c'est là le

procédé usité pour la division d'une droite en moyenne-extrême raison. Portez dix fois AD sur la circonférence et vous devrez retomber sur le point de départ *.

Scholie. — La note relative au problème de la division d'une droite en moyenne-extrême raison nous a appris que la plus grande partie était les 0,618 de cette droite. Donc *le côté du décagone est les* 0,618 *du rayon.*

Réciproquement *le rayon est égal au produit du côté du décagone par* 1,618.

Car de la relation $C = 0{,}618 \times R$, on tire :

$$R = \frac{C}{0{,}618} = C \times \frac{1}{0{,}618} = C \times 1{,}618.$$

Corollaire. — On déduit de l'inscription du décagone régulier, celle du pentagone et celle des polygones dont le nombre des côtés est exprimé par 5×2^n **.

---

* La droite AD' donne le côté du décagone étoilé en joignant les sommets de 3 en 3. Nous laissons aux élèves le soin de démontrer cette propriété.

** Si nous voulons avoir le côté du pentagone régulier inscrit au moyen du rayon, il nous faut recourir à la formule de la note du théorème 5 :

$$C = \sqrt{\frac{4R^2c^2 - c^4}{R^2}},$$

et substituer à la place de c le côté du décagone, égal, comme nous l'avons vu, à $\frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2}$. On trouve alors :

$$C = \sqrt{\frac{10R^2 - 2R^2\sqrt{5}}{4}},$$

qu'on peut mettre sous la forme :

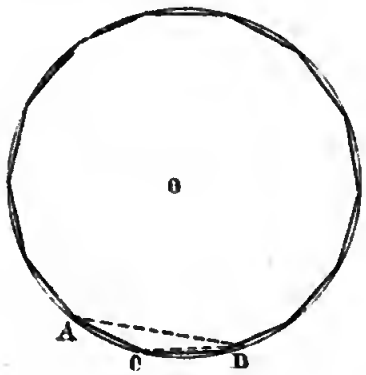
$$\sqrt{R^2 + \frac{R^2(6 - 2\sqrt{5})}{4}}.$$

Or, $\frac{R(6 - 2\sqrt{5})}{4}$ est le carré de $\frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2}$ ou du côté du décagone.

Alors cette remarque donne lieu à la propriété suivante : *Le côté du pentagone régulier inscrit est l'hypothénuse du triangle rectangle qui a pour côtés le rayon et le côté du décagone.*

PROBLÈME 4. — *Inscrire un pentédécagone dans un cercle.*

Analyse. — Le côté du pentédécagone sous-tend l'arc $\frac{360°}{15} = 24°$. Or, 24° exprime la différence entre 60° et 36°, c'est-à-dire entre l'arc sous-tendu par le côté de l'hexagone et celui qui l'est par le côté du décagone.



Synthèse. — Prenez la différence entre l'arc sous-tendu par le côté de l'hexagone et celui qui l'est par le côté du décagone, tracez sa corde et ce sera le côté du polygone demandé.

Corollaire.—On déduit de l'inscription du pentédécagone celle des polygones dont le nombre des côtés est exprimé par $3 \times 5 \times 2^n$.

Scholie 1. — Le calcul apprend que le côté du pentédécagone est les 0,415 du rayon à 0,001 près.

PROBLÈME 5. — *Diviser un arc de cercle en trois parties égales.*

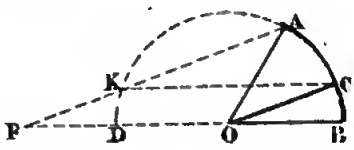
Nous avons vu comment on pouvait inscrire dans une circonférence, avec la règle et le compas, les polygones réguliers d'un nombre de côtés marqué par les progressions :

3 :	6 :	12 :	24 :	48 :	96	etc.,	dérivés de l'hexagone.
4 :	8 :	16 :	32 :	64 :	128	etc.,	— du carré.
5 :	10 :	20 :	40 :	80 :	160	etc.,	— du décagone.
15 :	30 :	60 :	120 :	240 :	480	etc.,	— du pentédécagone.

On pourrait augmenter le nombre des dérivés de ces polygones si l'on savait diviser un arc en trois parties égales. Ce problème, fameux chez les anciens et connu sous le nom de *trisection de l'angle,* n'a encore reçu aucune solution élémentaire exempte de tâtonnements. Celle-ci est néanmoins suffisante pour la pratique.

Analyse. — Supposons que AB soit l'arc en question, et

soit BC le tiers de ce même arc. Prolongeons le rayon BO d'une longueur égale OD, et achevons la demi-circonférence à laquelle appartient l'arc AB. Par le point A menons une parallèle AF à OC jusqu'à la rencontre de BD prolongé. L'angle F étant égal à l'angle BOC devra avoir la même mesure que ce dernier. Or, le premier a pour mesure la différence d'arcs $\frac{AB - KD}{2}$. Le second a pour mesure l'arc BC. On aura donc : $\frac{AB - KD}{2} = BC$; et comme AB vaut 3BC, cette relation est la même que celle-ci : $3BC - KD = 2BC$, qui exige pour être satisfaite que $KD = BC$. Ces deux arcs étant égaux, la corde CK sera parallèle à DB, et comme KF l'est à CO, la figure KCOF est un parallélogramme. Donc KF est égal au rayon CO. Cette propriété peut servir à déterminer la position de FA, et alors on en déduira la parallèle OC.



Synthèse. — Prenez, sur une bande de papier dont l'arête est en ligne droite, une grandeur égale au rayon de l'arc AB donné. Disposez-la par tâtonnement de manière que le rayon FK, marqué sur l'arête, soit compris entre la demi-circonférence BAD et le prolongement du diamètre BD, et que de plus cette même arête passe à l'extrémité A de l'arc donné. Marquez le point K et menez par le centre une parallèle à FK, elle coupera l'arc à son tiers.

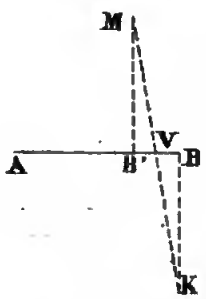
Problème 6. — *Inscrire approximativement dans un cercle un polygone qu'on ne sait pas inscrire rigoureusement.*

Si le polygone qu'on se propose d'inscrire n'est ni un des polygones dont le nombre des côtés soit 3, 4, 5, 15, ni un des dérivés de ceux-ci par la bisection ou trisection de l'arc, on peut avoir recours soit au tableau suivant, soit au procédé connu sous le nom de *procédé des deux erreurs contraires.*

Le polygone régulier de					
7	côtés est	$\frac{1}{2}$	du côté du triangle équilatéral.	L'erreur est $<0,002$	du rayon.
9	—	$\frac{2}{5}$	— —	$<0,01$	—
11	—	$\frac{2}{5}$	du côté du carré	$<0,003$	—
13	—	$\frac{1}{3}$	— —	$<0,01$	—
17	—	$\frac{3}{8}$	du rayon	$<0,01$	—
19	—	$\frac{1}{8}$	—	$<0,005$	—
21	—	$\frac{1}{6}$	du côté du triangle équil.	$<0,01$	—
23	—	$\frac{1}{5}$	du côté du carré	$<0,01$	—
25	—	$\frac{1}{4}$	du rayon	$<0,001$	—
27	—	$\frac{1}{6}$	du côté du carré	$<0,005$	—
29	—	$\frac{1}{8}$	du côté du triangle équil.	$<\frac{1}{500}$	—

Procédé des deux erreurs contraires.

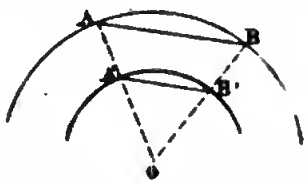
Supposons qu'il s'agisse de l'endécagone. On cherchera les côtés des deux polygones qu'on sait inscrire, et dont les nombres de côtés s'approchent le plus par excès et par défaut de celui du proposé. Dans le cas qui nous occupe, ce serait le côté du dodécagone celui et du décagone. On les porte tous deux sur une droite indéfinie à partir du même point A. Soit AB′ le plus petit, AB le plus grand. Elevez en B′ une perpendiculaire égale à AB′, et en B, mais en sens inverse, une autre égale à AB. Joignez leurs extrémités M et K. La droite AV sera le côté demandé.



En effet, si l'on avait porté le côté du dodécagone sur la circonférence, il y eût été douze fois. Donc il est trop petit et l'arc qui constitue l'erreur commise est celui du côté du dodécagone. Si l'on avait porté le côté du décagone, il n'y eût été que dix fois. Donc il est trop grand, et l'arc qui constituerait l'erreur par excès si on l'y portait onze fois serait justement celui du côté du décagone. Dans le premier cas, l'erreur par défaut est donc moindre que l'erreur

commise par excès dans le second cas. On conçoit donc que si on partage la différence B'B des deux côtés dans le rapport de ces deux côtés, la plus petite partie B'V ajoutée au plus petit côté AB', donnera approximativement le côté cherché. Il est facile de comprendre que par ce tracé la différence BB' se trouve divisée dans le rapport des côtés.

Problème 7. — *Inscrire dans une circonférence un polygone régulier désigné, au moyen de la table des cordes.*



Principe.— Dans les circonférences les cordes des arcs semblables ou de même indication, sont proportionnelles aux rayons. Soient en effet les deux arcs semblables AB, A'B'; de ce qu'ils correspondent au même angle au centre, les triangles AOB, A'OB' sont semblables. Donc on aura la proportion : corde AB : corde A'B' :: AO : A'O.

Il résulte de là que si l'on connaissait les côtés des divers polygones réguliers inscrits dans une circonférence d'un rayon connu, on en déduirait les longueurs des polygones semblables à inscrire dans une circonférence d'un rayon différent. Car deux polygones inscrits semblables ont pour côtés des cordes sous-tendant des arcs de même indication. Or, nous donnons ici une table contenant les cordes de tous les arcs de 10 en 10 minutes de 0° à 90° pour un rayon de 100 mètres.

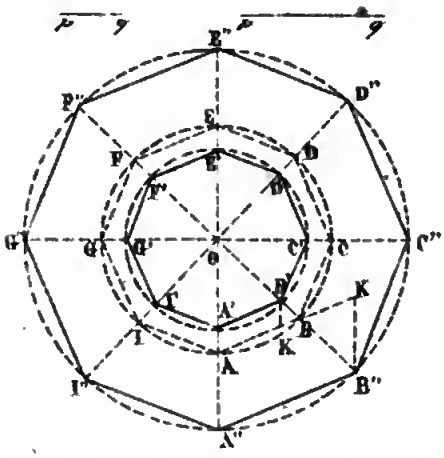
Supposons, comme application, qu'il s'agisse d'inscrire dans une circonférence d'un rayon de 150^m, un polygone régulier de 11 côtés. Je cherche d'abord l'arc sous-tendu par un côté de ce polygone, il est de $\frac{360°}{11} = 32° 44'$ à une minute près. Je trouve dans la table 56^m,25 pour corde correspondante à 32° 40'. La colonne intitulée *diff.* donnant la *différence* qui existe entre les cordes de deux arcs consécutifs différant de 10' et les différences entre les cordes de deux arcs presque égaux, pouvant sans erreur sensible être considérées comme proportionnelles aux différences de ces arcs, je dirai : si pour

10′ de différence entre deux arcs il y a 0,28 de différence entre leurs cordes ; pour 4′ de différence d'arcs, combien aurai-je de différence entre les cordes : $10 : 0{,}28 :: 4 : x$, d'où $x = \frac{4 \times 0{,}28}{10} = 0^m{,}112$ ou $0^m{,}11$ à un centième près. $56^m{,}25 + 0^m{,}11$ ou $56^m{,}36$ sera donc la corde de l'arc 32° 44′, pour un rayon de 100^m. Elle me sera donnée pour un rayon de 150^m par la proportion :

$56{,}36 : x :: 100 : 150$, d'où $x = \frac{56{,}36 \times 150}{100} = 84^m{,}54$ *.

Problème 8.—*Tracer, au moyen de la règle et du compas, un polygone régulier désigné, dont on donne le côté.*

Analyse. — Supposons qu'il s'agisse d'un octogone. Inscrivons dans un cercle de rayon arbitraire un polygone régulier de même nom, alors il sera facile d'en déduire le polygone semblable d'un côté donné en inscrivant entre les rayons ou les rayons prolongés du premier des parallèles à ses côtés, égales au côté donné.



Synthèse. — Inscrivez dans un cercle de rayon arbitraire un octogone régulier. Joignez le centre et les sommets. Portez sur l'un des côtés le côté donné *pq* ; s'il est plus petit, l'extrémité viendra en K par exemple, menez par ce point une parallèle au rayon AO jusqu'à sa rencontre en B′ avec OB. Menez la parallèle A′B′ à AB ; puis du centre avec OB′ ou OA′ pour rayon décrivez une circonférence, les points de rencontre de cette circonférence avec les rayons vous donneront les sommets

* Compas des cordes. Quart de cercle à rayon mobile.

du polygone demandé. Si pq est plus grand que AB, le point K tombera sur le prolongement de AB et la parallèle à OA rencontrera le prolongement de OB en B'', on mènera également par ce point une parallèle à AB jusqu'au prolongement de OA, et la circonférence décrite avec le rayon OB'' ou OA'' donnera, par sa rencontre avec les rayons prolongés, les sommets du polygone*.

Scholie. — Les deux triangles OAB et OA'B' étant semblables, donnent la proportion : AB : A'B' :: OA : OA'. Or, si AB, A'B' et OA sont connus, il est facile d'en déduire OA' en vertu de cette proportion. Ces trois termes sont toujours connus lorsqu'on se propose de résoudre le problème par l'emploi des tables. Car AB est la corde des tables, obtenue par le procédé du problème 7, A'B' est le côté donné, OA est le rayon des tables ou 100^m.

Ex. Trouver le rayon du cercle dans lequel serait inscrit l'ennéagone qui aurait pour côté $2^m,50$.

La table des cordes donne $68^m,40$ pour côté de l'ennéagone inscrit, la corde de l'arc $\frac{360°}{9}$ ou 40°. J'aurai donc la proportion :

$$68,40 : 2,50 :: 100 : x, \text{ d'où } x = \frac{100 \times 2,50}{68,40} = 3^m,65.$$

RÉSUMÉ DES TRACÉS DES POLYGONES RÉGULIERS.

La suite des problèmes précédents donne les moyens de construire un polygone régulier quel qu'il soit :

1° Au moyen du rapporteur ou du graphomètre ;

2° Avec la règle et le compas.

Dans le premier cas, si le polygone désigné doit être inscrit dans une circonférence d'un rayon donné, on prend sur elle, au moyen de l'un des deux instruments, une suite de points de division comprenant entre eux des arcs déduits du nombre des côtés du polygone.

* De la machine à diviser les roues d'engrenage.

Si le côté est donné, on déduit du nombre des côtés la valeur de l'angle au sommet, et on construit le polygone par le procédé du cheminement.

Dans le second cas, si le polygone désigné doit être inscrit dans une circonférence d'un rayon donné, et que ce soit un de ceux qu'on sait inscrire rigoureusement, on a recours au procédé qui lui est spécial, et si c'est un de ceux qu'on ne sait inscrire qu'approximativement, on fait usage soit du procédé des deux erreurs contraires, soit de la table des cordes.

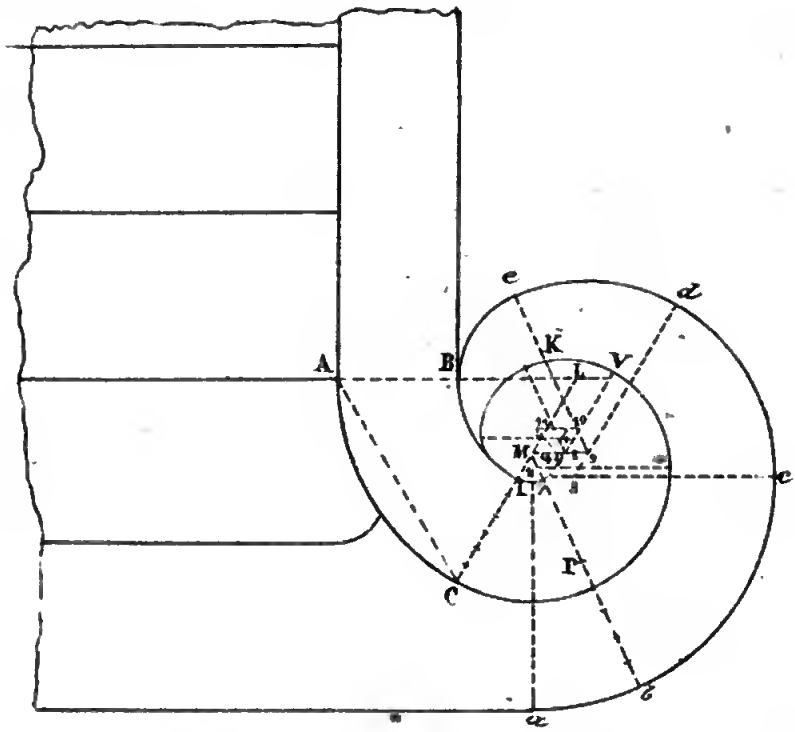
Si le côté est donné, on a recours au problème précédent.

APPLICATIONS.

La théorie des polygones réguliers reçoit dans les arts une foule d'applications. On y a recours pour la distribution des jantes des roues, pour celle des bras de châssis des impostes, des plans de joints des voussoirs d'une voûte, des cannelures des colonnes, pour la mosaïque et les ornements, le partage de la sphère en fuseaux, la distribution des aubes des roues hydrauliques, l'art de la taille du verre pour les vases circulaires, le tracé des excentriques en mécanique, le carrelage et le parquetage, etc. Nous nous arrêterons sur quelques-unes.

Application 1. — On termine ordinairement le limon et les dernières marches d'un escalier par des volutes composées d'arcs de cercle qui se raccordent sur les prolongements des côtés de polygones réguliers et dont voici le tracé.

Il est fondé sur les conditions suivantes du problème : Il y a trois volutes : une pour l'arête extérieure, une pour l'arête intérieure du limon et la troisième pour l'arête de la première marche. Les deux premières ont leurs origines aux deux points d'intersection de l'arête de la troisième marche avec celles du limon, et elles doivent se terminer par un œil au centre duquel est percé un trou dans lequel on scelle un



fuseau de la rampe ou main-courante. La troisième doit se raccorder en B avec l'arête extérieure du limon.

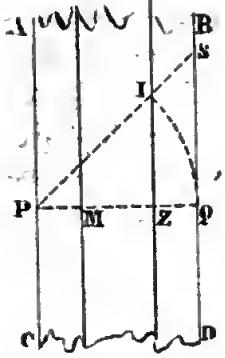
Tracé de la volute qui a son origine en A. On prolonge l'arête de la troisième marche d'une quantité BL égale à l'épaisseur AB du limon. Du point L avec LA pour rayon on décrit un arc de cercle de 60°, et qui est par conséquent limité au sommet C du triangle équilatéral qui a pour côté LA. Même opération avec BL pour rayon. Soit I l'extrémité de ce dernier arc. On prend le quart de IL à partir du point I. On divise IC en six parties égales, et on mène par le point M qui marque le quart de LI une parallèle à AB. On y porte, dans le sens MO et à partir du point M, une ligne égale à la sixième partie de IC. De l'extrémité O comme centre avec OM pour rayon on décrit une circonférence, dans laquelle on inscrit un hexagone en prenant M pour sommet. On en prolonge les côtés dans le sens des numéros d'ordre des sommets, et du

premier sommet comme centre avec MC pour rayon on décrit un arc de cercle jusqu'à la rencontre du prolongement de M1 ; on opère de même de chacun des sommets successifs en prenant pour rayons leurs distances aux extrémités des arcs précédents. La volute se terminera en I puisque le rayon primitif MC s'est raccourci du périmètre de l'hexagone ou de IC.

La seconde volute, commencée par l'arc BI, s'achève par la demi-circonférence qui a pour centre le milieu de I5 et pour rayon la distance de ce point milieu au point I.

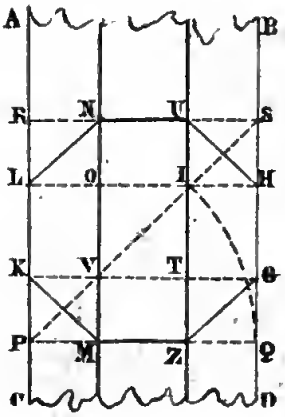
Pour la troisième volute, on abaisse du point M la perpendiculaire M*a* sur l'arête de la première marche, et de ce point comme centre avec cette perpendiculaire pour rayon je décris un arc de cercle que je limite en *b* sur le prolongement de M1. Je prends sur ce prolongement MP égal à IL, et je partage le reste P*b* en cinq parties égales. Sur MO prolongé je porte une de ces cinq divisions, et décris du point O' qui en résulte une circonférence dans laquelle j'inscris un hexagone en prenant M pour un des sommets. J'opère sur celui-ci comme sur le premier en prenant pour premier centre le point 7, et pour premier rayon la distance 7*b* ; arrivé au sommet 10, je lui substitue pour centre le point K de rencontre de 9.10 prolongé avec AB aussi prolongé, et j'adopte pour nouveau rayon K*e* avec lequel je décris l'arc *e*B qui vient se raccorder en B. Cela doit être ; car le rayon primitif M*b* a diminué d'abord de M7 + 7.8 + 8.9 + 9.10, c'est-à-dire des $\frac{4}{5}$ de P*b*. Ce qu'il en reste ou 10*e* a donc pour valeur $\frac{1}{5}$ de P*b* + MP ou $\frac{1}{5}$ de P*b* + BL à cause de MP = LI = BL, ou bien 11.10 + BL ou enfin BL + LV, LV étant une parallèle à 11.10 limitée par 10.V parallèle à ML. Donc il faut prouver que BL + LV = 10.K + KB. Or, cela a lieu ; car le petit triangle K.10.V est équilatéral comme ayant tous ses angles égaux aux angles extérieurs de l'hexagone dont chacun est de 60°, et par conséquent BL + LV ou son égal BK + KV = BK + K.10.

Application 2. — On a souvent dans les arts à *tirer à huit*



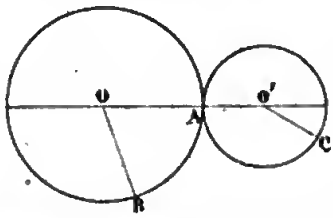
pans égaux une pièce de bois ou de pierre déjà équarrie à quatre pans égaux. Le tracé suivant est généralement adopté par les ouvriers.

Soit ABCD l'une des faces de la pièce. On y trace un trait PQ d'équerre sur AC, puis *un trait d'onglet* PS, c'est-à-dire une droite inclinée à 45°. On rabat PQ sur PS et on mène par le point I un trait de trusquin parallèlement à BD, on en mène un second distant de l'arête AC d'une quantité égale, on en fait autant sur chacune des quatre faces, et on abat les coins compris entre les traits de deux faces adjacentes. Pour nous rendre compte de ce tracé, observons que si par le point S nous menons une parallèle à PQ, la figure PQSR sera un carré égal à celui qui proviendrait de la section faite par un plan perpendiculairement à la longueur de la pièce, et que le point I satisfera à la question si nous prouvons que les points U, Z, N, M que donnent les traits de trusquin, sont ceux d'un octogone régulier LNUHGZMK, déduit du carré PQRS. A cet effet, prouvons que dans un octogone régulier, si l'on joint les points N et M, U et Z, L et H, K et G, la portion de diagonale PI est égale au côté PQ du carré. La figure KVMP est un carré dont KM est la diagonale, et comme KM est un côté de l'octogone, en le désignant par c, on aura : $PM = \frac{c\sqrt{2}}{2}$ (d'après ce qu'on a vu dans un corollaire du théorème du carré de l'hypothénuse). MZ est aussi un côté de l'octogone, et comme $ZQ = PM$, on aura : $PQ = MZ + 2PM$ ou $c + \frac{2c\sqrt{2}}{2}$ ou $c + c\sqrt{2}$. Or, $PI = PV + VI$ et $PV = KM$ puisque ce sont les deux diagonales d'un même carré, VI est



la diagonale du carré VOIT qui a pour côté VT ou son égal MZ, il est donc égal à $c\sqrt{2}$, on aura donc : $PI = KM + VI$ ou $c + c\sqrt{2}$. Donc $PI = PQ$.

Application 3. — On appelle *vitesse* dans les roues d'engrenage, l'angle au centre décrit dans l'unité de temps. Il résulte de cette définition et de la mesure des arcs que : *Les vitesses de deux roues qui engrènent l'une sur l'autre sont en raison inverse des rayons.*



Si nous supposons que les deux rayons OB ou R et O'C ou r étaient primitivement sur la ligne des centres, et qu'au bout de l'unité de temps ils aient les positions OB, O'C ; les deux arcs AB, AC auront des longueurs égales. Or, la longueur de l'arc AB est donnée par la formule : arc $AB = \frac{2\pi R \times \text{angle } O}{360^\circ}$ (voyez théor. 9), et arc $AC = \frac{2\pi r \times \text{angle } O'}{360^\circ}$. Comme ces deux arcs sont égaux en longueur, on aura : $\frac{2\pi R \times \text{angle } O}{360} = \frac{2\pi r \times \text{angle } O'}{360}$. Supprimant dans les deux membres le facteur $\frac{2\pi}{360}$, il vient :

$R \times \text{angle } O = r \times \text{angle } O'$, d'où angle O : angle O' :: r : R.

Lorsque les deux roues se communiquent le mouvement par des dents au lieu de se le communiquer par la simple pression mutuelle, les couronnes doivent donc avoir des nombres de dents proportionnels à leurs rayons. Car alors le plein et le vide qui séparent deux dents consécutives occuperont des arcs de même longueur sur les deux couronnes, et ce n'est qu'à cette condition que l'arc AB est égal à l'arc AC.

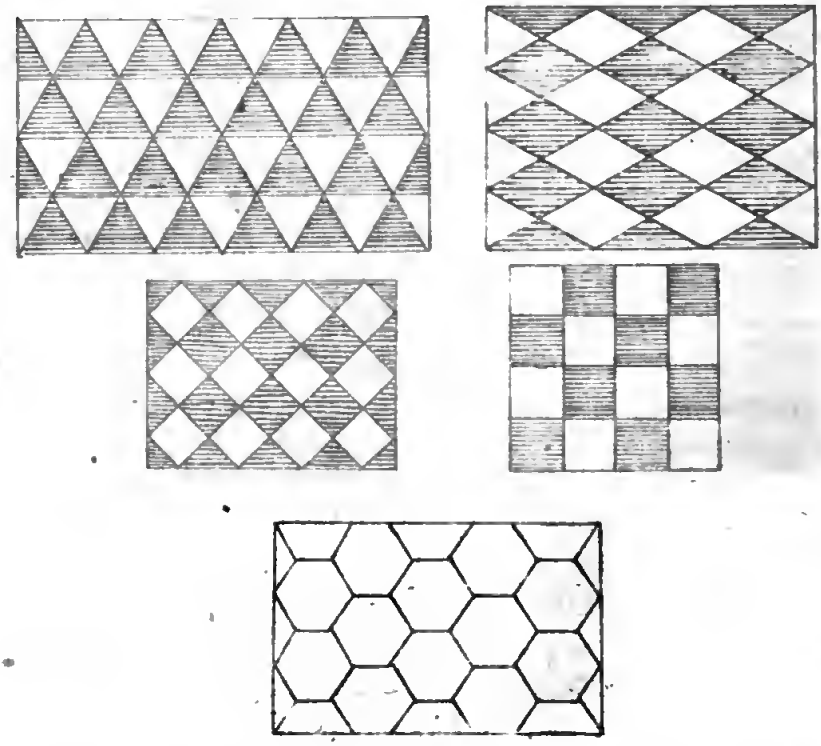
Application 4. — Du carrelage et du parquetage.

L'art du carrelage consiste à couvrir une portion de plan par des polygones réguliers assemblés par leurs sommets. Il y a deux manières d'y parvenir :

1° En faisant usage de polygones de même nom ;

2° De polygones différents.

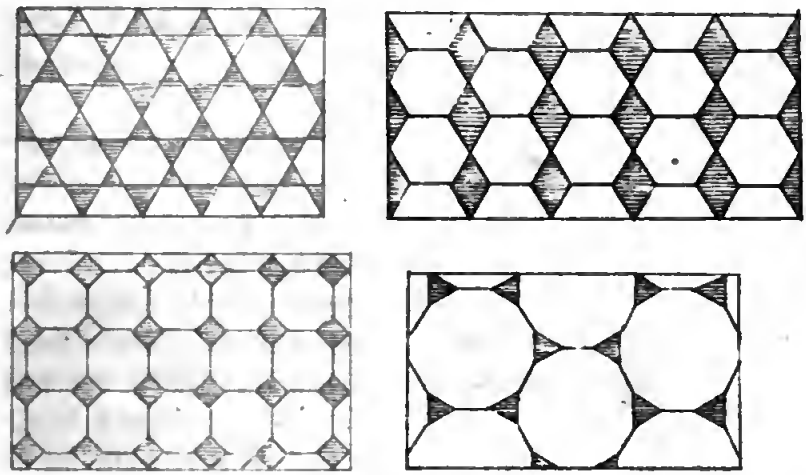
1° Il faut chercher quels sont les polygones réguliers dont l'angle au sommet soit un diviseur de 360°. On ne trouve que le *triangle équilatéral*, le *carré* et l'*hexagone*. Les quotients de 360° par l'angle au sommet de chacun de ces trois polygones indiquent combien il y en a de groupés autour d'un sommet.



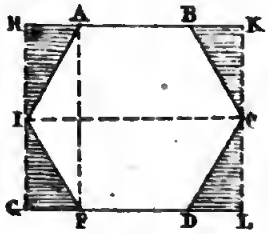
Il est souvent utile de connaître le nombre de carreaux nécessaires pour couvrir une surface ou un âtre de dimensions données. Il est évident que le quotient de la surface donnée par celle de chaque carreau est le nombre demandé.

Or, nous avons vu la mesure de la surface du triangle équilatéral et celle du carré. Quant à l'hexagone, comme il se compose de six triangles équilatéraux dont chacun a pour mesure $\frac{c\sqrt{3}}{4}$, c étant le côté du triangle ou de l'hexagone, il aura pour mesure : $\frac{6c\sqrt{3}}{4}$ ou $\frac{3c\sqrt{3}}{2}$.

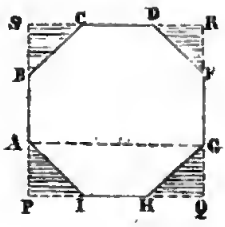
2° Pour obtenir les combinaisons possibles avec des polygones réguliers différents, on examine si en retranchant de 360° la valeur d'un ou plusieurs angles des polygones réguliers successifs, le reste est divisible par l'angle au sommet d'un autre polygone régulier. On ne trouve alors que l'*hexagone* et le *triangle équilatéral* (deux dispositions), l'*octogone* et le *carré*, le *dodécagone* et le *triangle équilatéral*.



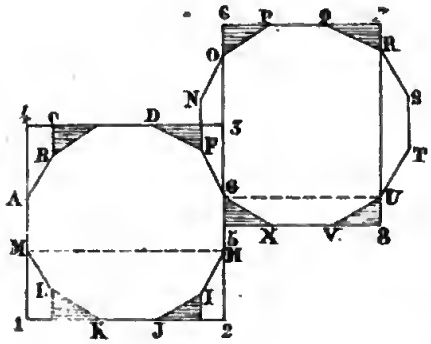
Pour savoir les nombres d'hexagones et de triangles nécessaires pour couvrir une surface donnée, nous observerons qu'il faut autant d'hexagones que de rectangles égaux au rectangle HKGL qui enveloppe l'un d'eux. Comme ce rectangle se compose en sus de quatre moitiés de triangles équilatéraux intermédiaires ou de deux triangles entiers, nous conclurons que le quotient de la surface à couvrir par celle du rectangle qui a pour dimensions la plus grande et la plus petite diagonale de l'hexagone, donnera le nombre d'hexagones, et le double de ce quotient le nombre de triangles nécessaires.



Dans la seconde disposition on considère les deux triangles équilatéraux comme formant une losange, et alors il y a autant de losanges que d'hexagones.

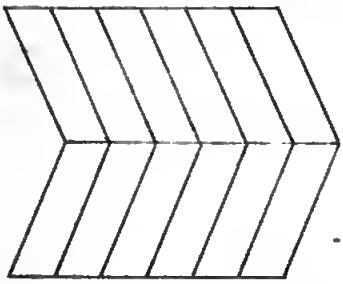


Pour le cas des octogones combinés avec des carrés, considérons le carré PQRS circonscrit à l'octogone, et observons qu'il y aura autant d'octogones dans la surface donnée que de carrés égaux à ce dernier. Ce carré se compose en outre de quatre quarts des petits carrés intermédiaires ou d'un carré entier. Nous conclurons que le quotient de la surface par celle du carré qui a pour côté la diagonale qui sous-tend trois côtés de l'octogone, donnera le nombre d'octogones nécessaires. Il y aura pareil nombre de petits carrés.

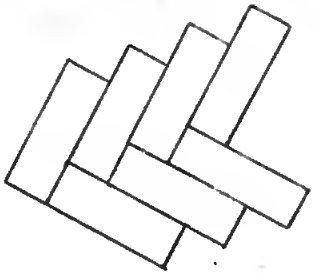


Pour le cas des dodécagones combinés avec des triangles équilatéraux, nous considérerons le carré 1.2.3.4 qui a pour côté la diagonale qui sous-tend cinq côtés du dodécagone, et le rectangle 5.6.7.8 qui a pour hauteur la même diagonale et pour base celle qui sous-tend trois côtés. Il est évident que ce mode de décomposition peut avoir lieu pour chaque couple de dodécagones adjacents. Il faudra donc autant de dodécagones pour couvrir une surface donnée qu'il y a d'unités dans le double du quotient de cette surface par la somme de celles de ces deux rectangles. Comme chacun d'eux se compose en outre de quatre moitiés de triangles équilatéraux ou de deux triangles entiers, il y aura deux fois plus de triangles équilatéraux que de dodécagones.

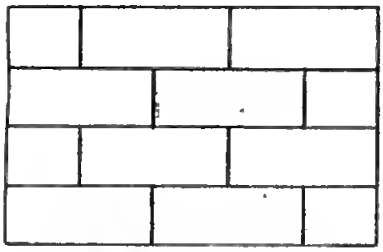
Enfin on couvre souvent une portion de plan par des combinaisons de polygones réguliers avec des irréguliers ou d'irréguliers avec des irréguliers, mais disposés avec régularité. Exemples :



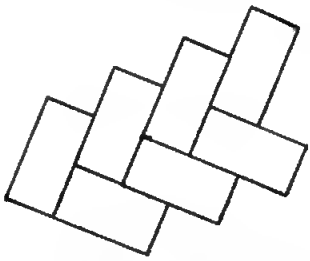
Parquet en points de hongrie.



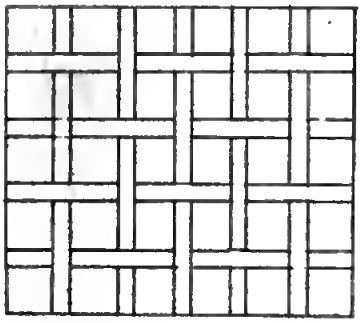
Parquet en capucine ou en fougère.



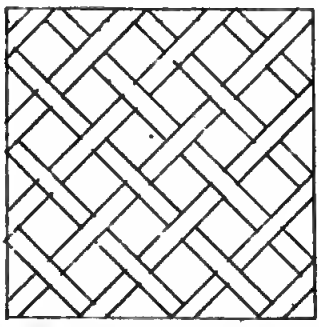
Carrelage ordinaire.



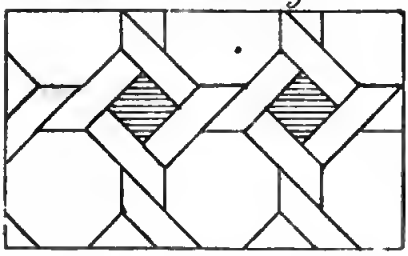
Carrelage en Épis.



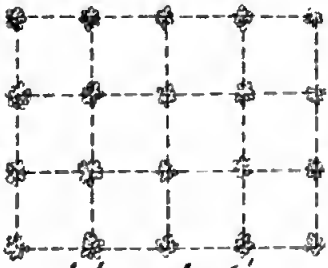
Carrelage ou parquet en carrés et rectangles.



Autre disposition



Carrelage en octogones Carrés et trapèzes rectangles

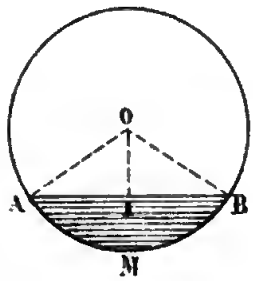


Arbres plantés en quinconce

Il est facile dans chacun de ces cas de calculer le nombre d'éléments de chaque espèce nécessaire pour couvrir une surface donnée.

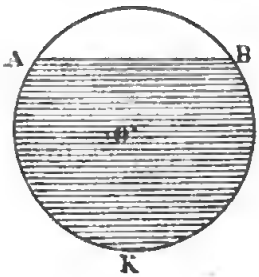
Application 5.— Du mesurage de divers segments de cercle.

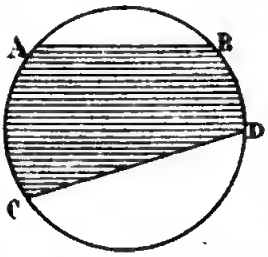
1° Mesurer la surface du segment AMB.



A cet effet nous évaluerons le secteur AOB et nous en retrancherons le triangle AOB.

Les éléments nécessaires pour résoudre cette question sont : l'angle AOB qu'on se donne au moyen du rapporteur, quand on a le dessin du segment ; le rayon et la corde qu'on peut mesurer ou qu'on peut déduire des deux données précédentes ; soit par l'emploi de la table des cordes ; soit par le calcul, si l'angle AOB est un des angles au centre d'un polygone régulier tel que le triangle équilatéral, l'hexagone, le décagone, etc., dont on a les côtés au moyen du rayon. Enfin la hauteur du triangle est aussi nécessaire pour le calcul de ce dernier. On peut la mesurer directement ou la déduire par le calcul de la moitié de la corde et du rayon, en faisant usage des propriétés du triangle rectangle *.



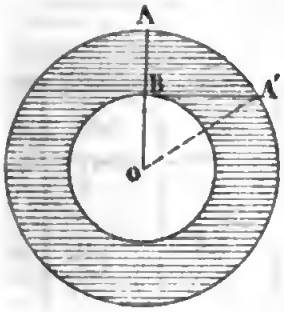


Il est facile de calculer aussi les segments AKB, ABCD.

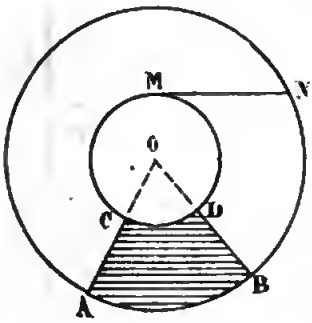
2° Mesurer la surface annulaire comprise entre deux cercles concentiques.

Si R est le grand rayon, la surface du grand cercle sera

* Application à la recherche du volume d'une portion de cylindre circulaire rempli en partie de liquide et dont l'axe est horizontal.



πR^2. Si r est celui du petit, sa surface sera πr^2. Leur différence $\pi R^2 - \pi r^2$ ou $\pi(R^2 - r^2)$ donnera la surface demandée. Mais on obtient une expression plus simple en observant que si on mène au petit cercle la tangente BA′ limitée au grand, et si on joint OA′, le triangle rectangle OBA′ donnera : $OA'^2 - OB^2 = BA'^2$ ou $R^2 - r^2 = BA'^2$. Substituant cette valeur dans l'expression $\pi(R^2 - r^2)$, il vient : $\pi.BA'^2$; c'est-à-dire que : *La surface annulaire comprise entre deux cercles concentriques est égale à celle d'un cercle qui aurait pour rayon la demi-tangente au petit, limitée au grand* *.



3° Mesurer la surface d'un secteur annulaire.

NOTA. On appelle *secteur annulaire* la surface annulaire comprise entre deux rayons du grand cercle.

On évaluera le grand secteur AOB et on en retranchera son semblable DOC. On aura alors :

$$\frac{\pi R^2 \times \text{ang. O}}{360} - \frac{\pi r^2 \times \text{ang. O}}{360} = \pi(R^2 - r^2) \times \frac{\text{ang. O}}{360} = \pi \times MN^2 \times \frac{\text{ang. O}}{360^\circ}.$$

---

* Application à la recherche de la capacité d'un compteur à gaz, d'une chaudière cylindrique dont la cheminée ou les carneaux sont formés d'un cylindre concentrique.

TABLE DES CORDES

POUR UN RAYON ÉGAL A CENT UNITÉS.

D.	0′	10′	20′	30′	40′	50′	DIFF.
0°	0,00	0,29	0,58	0,87	1,16	1,45	29
1	1,75	2,04	2,33	2,62	2,91	3,20	
2	3,49	3,78	4,07	4,36	4,65	4,94	
3	5,23	5,53	5,82	6,11	6,40	6,69	
4	6,98	7,27	7,56	7,85	8,14	8,43	
5	8,72	9,01	9,31	9,60	9,89	10,18	
6	10,47	10,76	11,05	11,34	11,63	11,92	
7	12,21	12,50	12,79	13,08	13,37	13,66	
8	13,95	14,24	14,53	14,82	15,11	15,40	
9	15,69	15,98	16,27	16,56	16,85	17,14	
10	17,43	17,72	18,01	18,30	18,59	18,88	
11	19,17	19,46	19,75	20,04	20,33	20,62	
12	20,91	21,20	21,48	21,77	22,06	22,35	
13	22,64	22,93	23,22	23,51	23,80	24,09	
14	24,37	24,66	24,95	25,24	25,53	25,82	
15	26,11	26,39	26,68	26,97	27,26	27,55	
16	27,83	28,12	28,41	28,70	28,99	29,27	
17	29,56	29,85	30,14	30,42	30,71	31,00	
18	31,29	31,57	31,86	32,15	32,44	32,72	
19	33,01	33,30	33,58	33,87	34,16	34,44	
20	34,73	35,02	35,30	35,59	35,87	36,16	
21	36,45	36,73	37,02	37,30	37,59	37,88	
22	38,16	38,45	38,73	39,02	39,30	39,59	
23	39,87	40,16	40,44	40,73	41,01	41,30	
24	41,58	41,87	42,15	42,44	42,72	43,00	28
25	43,29	43,57	43,86	44,14	44,43	44,71	
26	44,99	45,27	45,56	45,84	46,12	46,41	
27	46,69	46,97	47,25	47,54	47,82	48,10	
28	48,38	48,67	48,95	49,23	49,51	49,79	
29	50,08	50,36	50,64	50,92	51,20	51,48	
30	51,76	52,04	52,33	52,61	52,89	53,17	
31	53,45	53,73	54,01	54,29	54,57	54,85	
32	55,13	55,41	55,69	55,97	56,25	56,52	
33	56,80	57,08	57,36	57,64	57,92	58,20	
34	58,47	58,75	59,03	59,31	59,59	59,86	
35	60,14	60,42	60,70	60,97	61,25	61,53	
36	61,80	62,08	62,36	62,64	62,91	63,19	
37	63,46	63,74	64,01	64,29	64,56	64,84	
38	65,11	65,39	65,66	65,94	66,21	66,49	
39	66,76	67,04	67,31	67,59	67,86	68,13	27
40	68,40	68,68	68,95	69,22	69,49	69,77	
41	70,04	70,31	70,59	70,86	71,13	71,40	
42	71,67	71,95	72,22	72,49	72,76	73,03	
43	73,30	73,57	73,84	74,11	74,38	74,65	
44	74,92	75,19	75,46	75,73	76,00	76,27	

D.	0′	10′	20′	30′	40′	50′	DIFF.
45°	76,54	76,80	77,07	77,34	77,61	77,88	27
46	78,15	78,41	78,68	78,95	79,22	79,48	
47	79,75	80,02	80,28	80,55	80,82	81,08	
48	81,35	81,61	81,88	82,14	82,41	82,67	
49	82,94	83,20	83,47	83,73	84,00	84,26	
50	84,52	84,79	85,06	85,32	85,58	85,84	26
51	86,19	86,36	86,63	86,89	87,15	87,41	
52	87,67	87,94	88,20	88,46	88,72	88,98	
53	89,24	89,50	89,76	90,02	90,28	90,54	
54	90,80	91,06	91,32	91,57	91,83	92,09	
55	92,35	92,61	92,87	93,12	93,38	93,64	
56	93,89	94,15	94,41	94,66	94,92	95,18	
57	95,43	95,69	95,94	96,20	96,45	96,71	
58	96,96	97,22	97,47	97,72	97,98	98,23	
59	98,48	98,74	98,99	99,24	99,49	99,75	25
60	100,00	100,25	100,50	100,75	101,01	101,26	
61	101,51	101,76	102,01	102,26	102,51	102,76	
62	103,01	103,26	103,51	103,75	104,00	104,25	
63	104,50	104,75	105,00	105,24	105,49	105,74	
64	105,98	106,23	106,48	106,72	106,97	107,21	
65	107,47	107,71	107,95	108,19	108,44	108,68	
66	108,93	109,17	109,41	109,66	109,90	110,14	24
67	110,39	110,63	110,87	111,11	111,36	111,60	
68	111,84	112,08	112,32	112,56	112,80	113,04	
69	113,28	113,52	113,76	114,00	114,24	114,48	
70	114,72	114,95	115,19	115,43	115,67	115,90	
71	116,14	116,38	116,61	116,85	117,09	117,32	
72	117,56	117,79	118,03	118,26	118,50	118,73	
73	118,96	119,20	119,43	119,66	119,90	120,13	
74	120,36	120,60	120,83	121,06	121,29	121,52	23
75	121,75	121,98	122,21	122,44	122,67	122,90	
76	123,13	123,36	123,59	123,82	124,05	124,27	
77	124,50	124,73	124,96	125,18	125,41	125,64	
78	125,86	126,09	126,32	126,54	126,77	126,99	
79	127,21	127,44	127,66	127,89	128,11	128,33	22
80	128,56	128,78	129,00	129,22	129,44	129,66	
81	129,89	130,11	130,33	130,55	130,77	130,99	
82	131,21	131,43	131,65	131,87	132,09	132,31	
83	132,52	132,74	132,96	133,18	133,39	133,61	
84	133,83	134,04	134,26	134,47	134,69	134,90	21
85	135,12	135,33	135,55	135,76	135,97	136,19	
86	136,40	136,61	136,82	137,04	137,25	137,46	
87	137,67	137,88	138,09	138,30	138,51	138,72	
88	138,93	139,14	139,35	139,56	139,77	139,97	
89	140,18	140,39	140,60	140,80	141,01	141,21	

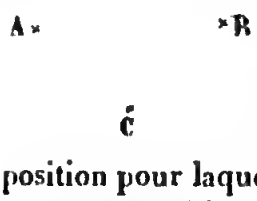
Digitized by Google

LIVRE CINQUIÈME.

DES PLANS, DE LA PERPENDICULAIRE ET DES OBLIQUES.

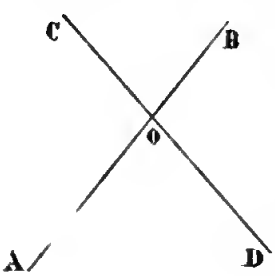
Nous avons vu, dans les notions préliminaires, la définition du plan.

Théorème 1. — *Trois points non en ligne droite déterminent la position d'un plan.*



Soient A, B, C les trois points donnés. Imaginons un plan passant par les deux points A et B et faisons-le tourner autour de AB comme charnière, il atteindra une position pour laquelle il passera par le point C et il est évident que cette position sera la seule qui satisfasse à cette condition.

Corollaire 1. — Deux droites qui se coupent déterminent la position d'un plan.



Car si nous considérons le point d'intersection de ces deux droites et un point de chacune d'elles, le plan qui passera par ces trois points contiendra les deux droites, puisqu'il contient deux points de chacune d'elles.

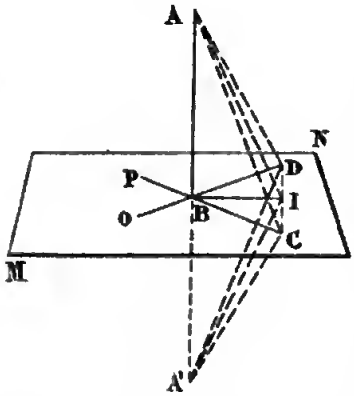
Corollaire 2. — Deux parallèles déterminent un plan.

Car d'après la définition, deux parallèles sont situées dans un même plan, et on pourra le déterminer comme précédemment en remplaçant le système des deux parallèles par une d'elles et leur sécante.

Corollaire 3. — L'intersection de deux plans est une droite.

Car si l'intersection avait seulement trois points non en ligne droite, les deux plans passant par ces trois points n'en feraient qu'un seul.

THÉORÈME 2. — *Si une droite est perpendiculaire à deux autres qui passent par son pied dans un plan, elle le sera à toute autre menée par son pied dans le même plan.*



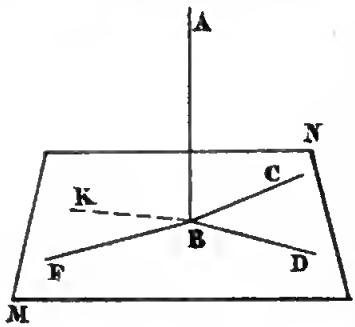
Soit AB perpendiculaire aux deux droites BD, BC dans le plan MN; je dis qu'elle le sera à toute autre BI menée par son pied B dans ce plan. Prolongeons AB au-dessous du plan d'une grandeur égale à elle-même. Joignons A et A' à un point quelconque D de la droite BD et à un point quelconque C de BC. Tirons la droite CD et joignons son point de rencontre I avec BI aux deux points A et A'. Les deux triangles ABD, A'BD sont égaux comme ayant un angle droit compris entre deux côtés égaux, donc AD = A'D. Il en est de même des triangles ABC, A'BC. Donc AC = A'C. Par conséquent les deux triangles ADC, A'DC sont égaux comme ayant les trois côtés égaux. En les repliant l'un sur l'autre, AI coïncidera avec A'I. Donc le point I est équidistant des points A et A'. Il en est de même du point B. Nous concluons que la droite BI est perpendiculaire au milieu B de AA'.

Scholie. — On appelle *droite perpendiculaire à un plan,*

celle qui est perpendiculaire à toutes les droites qui passent par son pied dans le plan. Il résulte de ce qui précède, que pour s'assurer si une droite est perpendiculaire à un plan, il suffit de vérifier si, l'un des côtés de l'angle droit d'une équerre coïncidant déjà avec la droite, l'autre côté coïncide avec le plan dans deux positions différentes.

On appelle *plan horizontal* celui qui est perpendiculaire à *la verticale* d'un lieu, c'est-à-dire à la droite dont la direction est donnée par le fil à plomb. L'instrument destiné à la vérification d'un plan horizontal se nomme *niveau* *.

Corollaire. — Si une droite est perpendiculaire à une autre, elle engendrera un plan perpendiculaire à celle-ci en tournant autour d'elle comme axe.



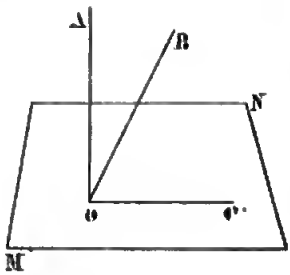
Soit AB la droite autour de laquelle tourne BC qui lui est perpendiculaire; considérons les deux positions BC, BD de celle-ci, et faisons-y passer un plan; je dis que la droite BC, dans toute autre position, BF par exemple, sera dans ce plan. Car si elle n'y était pas, je conduirais un plan par AB et BF, il couperait alors le plan MN suivant KB par exemple, qui serait perpendiculaire à AB, d'après le théorème précédent; mais, par hypothèse, BF l'est déjà. Donc, du point B dans le même plan ABF, on pourrait élever deux perpendiculaires à une droite, ce qui est impossible.

Théorème 3. — *Par un point donné, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à un plan.*

1° Supposons le point donné sur le plan.

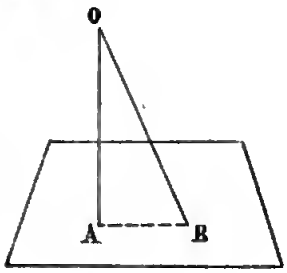
Si on pouvait en mener deux, soit OA l'une et soit OB l'autre; conduisons un plan par ces deux droites et supposons

* Niveaux à perpendicule, à bulle d'air. Leur vérification. Leur usage.



que son intersection avec le plan MN soit OC; alors OA et OB seraient toutes deux perpendiculaires à OC dans le plan AOC, ce qui a été démontré impossible dans le premier livre.

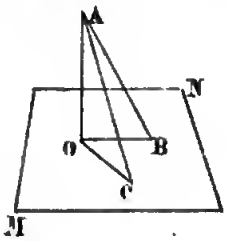
2° Supposons le point donné hors du plan.



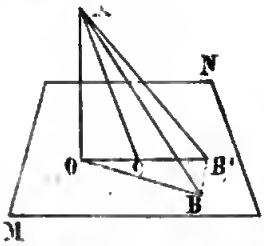
Conduisons également un plan par les deux perpendiculaires, dans l'hypothèse où il pourrait y en avoir deux, alors OA et OB seraient aussi perpendiculaires à AB, ce qui est impossible. Donc l'une d'elles est oblique.

Scholie. — Toute perpendiculaire abaissée d'un point extérieur au plan est plus courte que toute oblique partant du même point, et elle exprime la distance d'un point à un plan.

Théorème 5 — 1° *Les obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire à un plan sont égales;* 2° *celle qui s'en écarte le plus est la plus longue.*



1° Si OB = OC, AC et AB seront égales comme hypothénuses de deux triangles rectangles égaux AOC, AOB.



2° L'oblique AB qui s'écarte plus que AC est la plus longue. Car si on rabat OB sur OC prolongée on aura AB' = AB d'après ce qui précède. Mais AB' est plus grande que AC, puisque OB' est plus grande que OC. Donc aussi AB > AC.

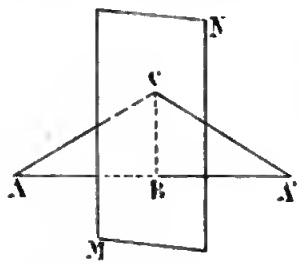
Théorème 6. — *Réciproquement deux obliques égales*

s'écartent également du pied de la perpendiculaire et de deux obliques inégales, la plus grande s'écarte le plus.

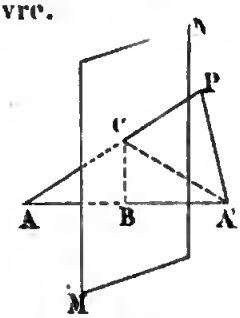
Car si deux obliques égales ne s'écartaient pas également, l'une s'écarterait plus que l'autre et serait la plus grande, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si la plus grande ne s'écartait pas le plus, elle s'écarterait autant ou moins ; dans le premier cas elle serait égale à l'autre et dans le second cas elle serait plus petite que l'autre, ce qui est contraire à l'hypothèse.

THÉORÈME 7. — 1° *Tout point pris sur un plan perpendiculaire au milieu d'une droite est équidistant des extrémités de celle-ci ; 2° tout point pris hors de ce plan est plus près d'une extrémité de la droite que de l'autre.*



1° Soit MN le plan perpendiculaire au milieu de AA', je dis qu'on aura : CA = CA', C étant un point pris dans le plan. En effet, soit B le point de rencontre ou *la trace* de AA' sur le plan MN ; joignons CB, alors cette droite sera perpendiculaire au milieu de AA' et la proposition est ramenée à celle du premier livre.

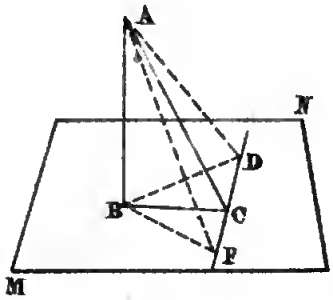


2° Soit P un point pris hors du plan, je dis qu'on aura : PA' < PA. Joignons au point A' la trace C de PA sur le plan MN, joignons également BC, et la proposition est encore ramenée à celle-ci : tout point P pris hors de la perpendiculaire BC au milieu d'une droite est plus près d'une extrémité que de l'autre.

Scholie. — On dit alors que le plan perpendiculaire au milieu d'une droite est le lieu géométrique de tout point équidistant des extrémités de cette droite ; et comme trois points non en ligne droite suffisent pour déterminer un plan, nous conclurons que : *Tout plan qui a trois points non en*

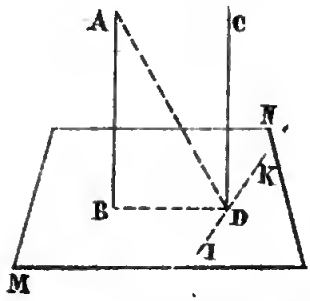
ligne droite équidistants chacun des extrémités d'une droite est perpendiculaire en son milieu.

Théorème 8. — *Si du pied d'une perpendiculaire à un plan on abaisse une perpendiculaire à une droite située dans ce plan, et qu'on joigne le pied de cette dernière avec un point quelconque de la première, la droite de jonction sera perpendiculaire à celle du plan.*



Soient AB la perpendiculaire au plan MN, FD la droite située dans ce plan, BC la perpendiculaire sur celle-ci, je dis que AC le sera à FD. Prenons en effet FC = CD, et joignons les deux points F et D aux deux points B et A; alors l'oblique BD sera égale à BF, par suite AF à AD. Donc AC aura deux de ses points A et C équidistants des extrémités F et D de FD; donc elle lui sera perpendiculaire.

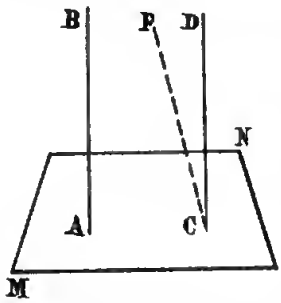
Théorème 9. — *Si une droite est perpendiculaire à un plan, sa parallèle le sera aussi.*



Si AB est perpendiculaire au plan MN, CD le sera.

En effet, menons un plan suivant ces deux droites, et soit BD son intersection avec MN; AB sera perpendiculaire à BD et sa parallèle aussi. Si on peut démontrer qu'elle le sera à une autre, elle le sera au plan. Or, menons à BD, dans le plan MN, la perpendiculaire IK et joignons AD; d'après le théorème précédent, AD est perpendiculaire à IK et réciproquement IK l'est à AD; mais elle l'est à BD, par conséquent au plan ABD qui passe par ces deux droites et par suite à DC; ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. — Par un point C on ne peut mener dans l'espace qu'une parallèle à une droite AB.



Car si on pouvait en mener deux CD et CF, tout plan conduit par le point C perpendiculairement à la droite donnée serait perpendiculaire à ces deux parallèles. On pourrait donc élever par un point sur un plan deux perpendiculaires à ce plan, ce qui est impossible.

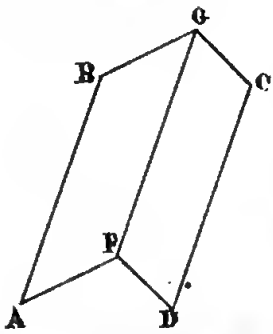
Théorème 10. — *Réciproquement deux perpendiculaires à un même plan sont parallèles.*

Car si la droite DC perpendiculaire au plan MN n'était pas parallèle à AB aussi perpendiculaire à ce plan, j'en menerais une CF par le point C. Elle serait perpendiculaire au plan MN d'après le théorème précédent; mais, par hypothèse, CD l'est déjà. Donc du point C on pourrait élever au même plan MN deux perpendiculaires, ce qui est impossible.

Corollaire 1. — Deux droites parallèles à une troisième dans l'espace sont parallèles.

Car si l'on mène un plan perpendiculaire à cette troisième, il le sera aux deux autres qui seront par conséquent parallèles.

Corollaire 2. — Deux plans qui se coupent et qui passent par deux droites parallèles, ont leur intersection parallèle à ces droites.



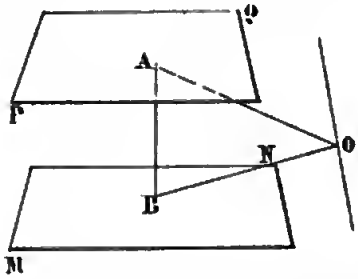
Soient AB, CD les deux droites en question; AG, DG les deux plans. Si par un point F de leur intersection nous menons une parallèle à AB, elle sera tout entière dans le plan AG, et si par le même point nous en menons une à DC, elle le sera à AB et sera tout entière dans le plan DG. Elles se confondront d'après le théorème précédent, et coïncideront par conséquent avec l'intersection FG.

DU PARALLÉLISME DES PLANS ET DES DROITES.

On appelle *plans parallèles* ceux qui ne peuvent se rencontrer quelque loin qu'on les prolonge.

Une droite est dite aussi parallèle à un plan lorsqu'elle ne le rencontre pas quelque loin qu'on prolonge le plan et la droite.

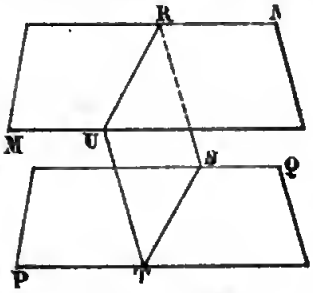
Théorème 11. — *Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.*



Car s'ils se rencontraient, en joignant un point quelconque O de leur intersection aux deux traces ou pieds de la droite, les droites OA, OB seraient perpendiculaires à AB, ce qui est impossible.

Corollaire. — Deux plans horizontaux sont donc parallèles puisqu'ils sont perpendiculaires à la verticale.

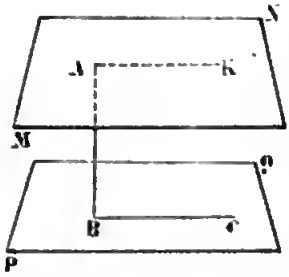
Théorème 13. — *Les intersections de deux plans parallèles par un troisième sont parallèles.*



Car si les intersections UR et TS du plan TR avec les deux plans parallèles MN et PQ n'étaient pas parallèles, elles se rencontreraient puisqu'elles sont dans le même plan; les deux plans MN et PQ qui les contiennent se rencontreraient donc aussi, ce qui est contraire à l'hypothèse.

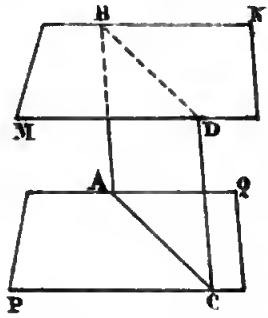
Théorème 14. — *Toute perpendiculaire à un plan l'est à tout plan parallèle à ce dernier.*

Car si suivant AB perpendiculaire au plan PQ je conduis un plan, il le coupera suivant BC et il coupera son parallèle



MN suivant AK, qui sera parallèle à BC d'après le théorème précédent. Or, AB est perpendiculaire à BC, elle le sera donc à AK. On démontrerait de même qu'elle l'est à une autre droite menée par son pied dans le plan MN; étant perpendiculaire à deux droites, elle le sera au plan MN qui contient ces deux droites.

THÉORÈME 15. — *Les parties de deux parallèles comprises entre deux plans parallèles sont égales.*

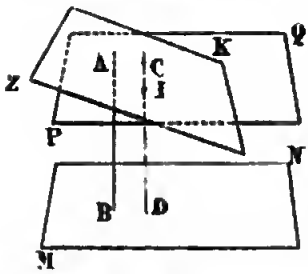


Car si nous menons un plan suivant les deux parallèles AB, CD comprises entre les plans parallèles MN, PQ, ses intersections avec ceux-ci seront parallèles. Donc la figure ABCD est un parallélogramme. Donc AB = CD.

Corollaire 1. — Deux plans parallèles sont partout également distants.

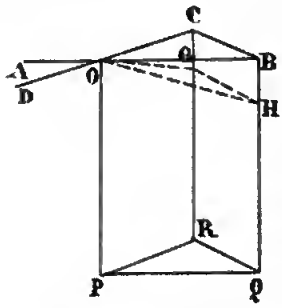
Car deux plans parallèles ont pour plus courte distance une perpendiculaire commune, et si on en mène plusieurs elles seront parallèles, par conséquent égales.

Corollaire 2. — Par un point on ne peut mener qu'un plan parallèle à un plan donné.



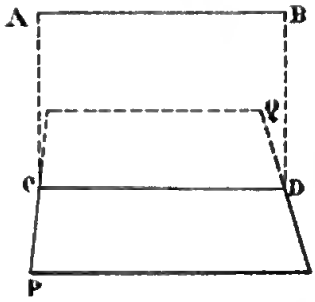
Car si, par le point A donné hors du plan MN, on pouvait mener deux plans parallèles à ce dernier, soient PQ l'un et ZK l'autre; abaissons du point A la perpendiculaire commune AB, et du point C pris dans le plan PQ abaissons-en une autre; soit I sa trace sur le plan ZK; les deux droites CD et ID étant respectivement égales à AB seraient égales entre elles, ce qui est absurde.

Théorème 16. — *Si deux angles ont leurs côtés parallèles, ils sont égaux ou supplémentaires pour les mêmes hypothèses que dans le premier livre, et les plans qui les contiennent sont parallèles.*



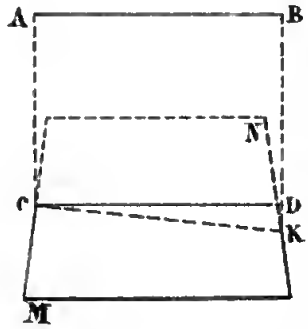
Soient RPQ un des angles donnés, AB, DC les deux droites indéfinies qui forment l'autre. Considérons l'angle formé des deux parties OC, OB dirigées dans le même sens que les côtés de l'angle P. Prenons les longueurs OC, PR égales et arbitraires; de même pour OB, PQ; joignons BC, RQ. A cause des côtés égaux et parallèles OC et PR, la figure OCPR est un parallélogramme. Même conclusion pour la figure OBPQ. Donc BQ = OP = CR, et de plus ces trois droites sont parallèles : d'où il résulte que la figure RCBQ est un parallélogramme et par suite BC = RQ. Donc les deux triangles OCB, RPQ ayant les trois côtés égaux sont égaux et l'angle COB = RPQ. S'il était question de l'angle AOD qui a ses côtés de sens contraires à ceux de l'angle COB, on dirait que ce dernier étant égal comme opposé par le sommet à l'angle COB serait égal à l'angle P. Enfin s'il était question de l'angle COA dont OC est de même sens que PR et OA de sens contraire à PQ, on dirait que, comme il est supplémentaire de l'angle COB, il le serait de l'angle P son égal; ce qui démontre la première partie de l'énoncé. Les plans COB, RPQ sont parallèles; car s'ils ne l'étaient pas, nous pourrions mener par le point O un plan parallèle au plan RPQ et soient G et H les points où il coupe RC, BQ, on aurait alors RG et HQ égales à OP comme parallèles comprises entre plans parallèles; mais déjà RC et QB sont égales à OP. Donc on aurait RG = RC et HQ = QB, ce qui est évidemment impossible.

Théorème 17. — *Tout plan conduit suivant une parallèle à un autre plan coupe ce dernier suivant une parallèle à celle-ci.*



Car si l'intersection CD du plan ABCD conduit suivant AB, parallèle au plan PQ, n'était pas parallèle à AB, elle la rencontrerait, et comme elle est dans le plan PQ, celui-ci rencontrerait AB, ce qui est contre l'hypothèse.

Corollaire. — Si une droite est parallèle à un plan, toute parallèle à à celle-ci menée par un point situé dans ce plan y sera située elle-même.

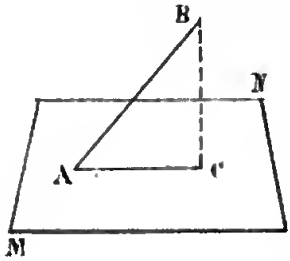


Car si CD menée par le point C paralèllement à AB n'était pas située dans le plan MN, je conduirais un plan suivant AB et CD, alors son intersection CK avec le plan MN serait parallèle à AB; mais CD l'est déjà. Donc on pourrait mener du même point C deux parallèles à AB, ce qui ne se peut.

THÉORÈME 18. — *Si par un point quelconque pris dans un plan, on mène une parallèle à une droite et qu'elle coïncide avec ce dernier, le plan est parallèle à la droite.*

Car si la droite rencontrait le plan, ce ne pourrait être qu'en un point de sa parallèle qui est dans le même plan qu'elle, et cela ne se peut.

DES ANGLES D'UNE DROITE ET D'UN PLAN, DE DEUX PLANS ENTRE EUX.

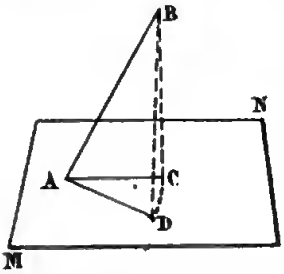


L'angle d'une droite et d'un plan se mesure par l'angle que fait cette droite avec sa projection sur ce plan.

La projection d'une droite limitée sur un plan est la distance des pieds des perpendiculaires abaissées des

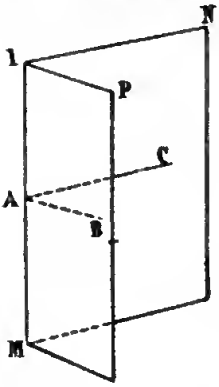
extrémités de la droite sur ce plan. Si la droite rencontre le plan, c'est la distance de son pied à celui de la perpendiculaire abaissée de l'une des extrémités sur ce plan, ainsi AC est la projection de AB.

Théorème 19. — *L'angle d'une droite et de sa projection sur un plan est plus petit que celui que fait cette droite avec toute autre tracée par son pied dans le plan.*



Si AC est la projection de AB sur le plan MN, l'angle BAC est plus petit que celui que fait avec AB toute autre droite AD tracée dans le plan. Prenons en effet AD égale à AC, et joignons BD. Les deux triangles BAC, BAD ont deux côtés égaux chacun à chacun, savoir : AB commun, AC = AD par construction, mais BD est plus grande que BC comme oblique par rapport à BC perpendiculaire. Donc l'angle opposé BAD est plus grand que BAC.

Théorème 20. — *L'angle de deux plans dit angle dièdre est mesuré par l'angle rectiligne que font les deux perpendiculaires élevées par un point quelconque de leur intersection dans chacun des deux plans.*



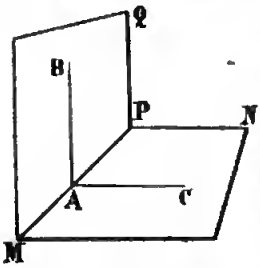
D'abord l'angle CAB que font les deux perpendiculaires à l'intersection MI des deux plans MN et MP est le même, quel que soit le point qu'on ait choisi sur l'intersection, parce que les droites qui le forment sont parallèles aux perpendiculaires menées à l'intersection dans chacun des deux plans. En second lieu, il pourra servir de mesure à l'angle dièdre si l'on prouve qu'il croît comme l'angle dièdre lorsqu'on fait varier celui-ci. A cet effet supposons que le plan MP se confonde primitivement avec le plan MN, alors AB se confondra avec AC. S'il s'en

détache ensuite pour décrire une révolution autour de IM comme axe, la droite AB décrira un plan perpendiculaire à IM, chacun de ses points décrira une circonférence, et si le plan MP ne fait que $\frac{1}{360}$ ou $\frac{2}{360}$, etc., de révolution, chacun des points de AB ne décrira que $\frac{1}{360}$ ou $\frac{2}{360}$, etc., de circonférence, c'est-à-dire 1 ou 2, etc., degrés servant de mesure à l'angle CAB. Donc l'angle dièdre et l'angle rectiligne en question croissent dans le même rapport.

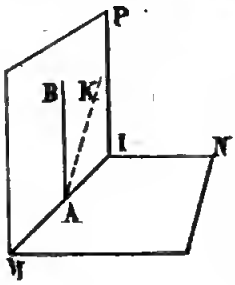
Scholie. — Il est facile de démontrer qu'il n'y a que l'angle rectiligne formé des deux perpendiculaires, qui croisse proportionnellement au dièdre.

Si l'angle rectiligne qui mesure le dièdre est droit, le dièdre est dit droit et *les plans sont dits perpendiculaires entre eux ou rectangulaires.*

THÉORÈME 21. — *Si deux plans sont perpendiculaires et que par un point de leur intersection on élève dans l'un d'eux une perpendiculaire à cette intersection, elle sera perpendiculaire à l'autre plan.*



La perpendiculaire AB, élevée dans le plan MQ à l'intersection MP des deux plans rectangulaires MN, MQ, est perpendiculaire au plan MN. Car si au point A nous élevons à MP la perpendiculaire AC dans le plan MN, l'angle BAC sera droit puisque c'est précisément l'angle rectiligne qui mesure le dièdre. Mais déjà par hypothèse l'angle BAM est droit; donc AB étant perpendiculaire aux deux droites MP et AC le sera au plan MN qui passe par ces deux droites.

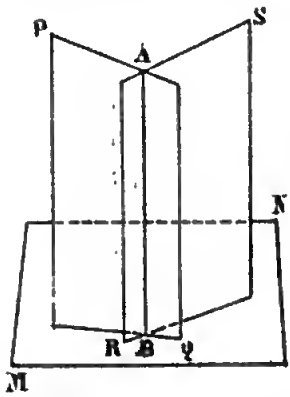


Corollaire 1. — Si par un point de l'intersection de deux plans perpendiculaires on élève à l'un d'eux une perpendiculaire, elle sera tout entière dans l'autre.

Car si AB élevée par le point A perpendiculairement au plan MN n'était pas située dans le plan MP perpendiculaire

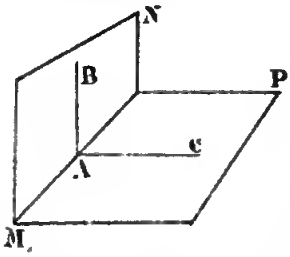
au premier, j'éleverais en A, à l'intersection MI et dans le plan MP, la perpendiculaire AK ; d'après ce qui précède elle serait perpendiculaire au plan MN, mais, par hypothèse, AB l'est déjà. Donc au point A on pourrait élever au plan MN deux perpendiculaires, ce qui ne se peut.

Corollaire 2. — Deux plans perpendiculaires à un troisième ont leur intersection perpendiculaire à ce dernier.



Car si par le point B commun aux deux traces des plans PQ, RS perpendiculaires au plan MN, on élève une perpendiculaire, elle se trouvera à la fois dans l'un et l'autre, puisque le point B est commun aux deux traces RB et BQ. Donc elle se confondra avec leur intersection.

Théorème 22. — *Tout plan conduit suivant une perpendiculaire à un autre lui est perpendiculaire.*



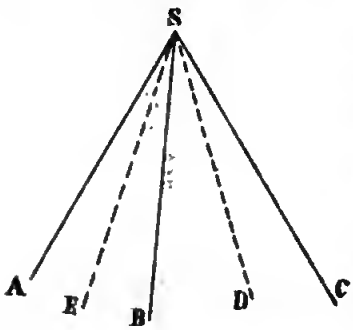
Le plan MN conduit suivant AB perpendiculaire au plan MP est perpendiculaire à ce dernier. Car si nous élevons dans le plan MP la perpendiculaire AC à l'intersection, l'angle BAC qui en résulte sera droit puisque AB, comme perpendiculaire au plan, l'est à toute droite qui passe par son pied dans le plan. Or, cet angle mesure le dièdre, donc ce dièdre est droit.

Scholie. — Si la ligne AB est la direction du fil aplomb, elle porte le nom de *verticale*, alors le plan MN qui passe par cette droite se nomme *plan vertical*, et il est perpendiculaire au *plan horizontal* MP. Il résulte de cette définition et du dernier corollaire que : *L'intersection de deux plans verticaux est une verticale* *.

* Manière de rapporter sur la planchette dans les levers un point du terrain pris pour station.

DES ANGLES POLYÈDRES.

On appelle *angle polyèdre* la portion indéfinie de l'espace comprise entre plusieurs plans qui se coupent tous en un même point, et qui sont limités à leurs intersections. Le point S est *le sommet* de l'angle polyèdre dit aussi *angle solide*; ces intersections sont *les arêtes* et les angles plans ASB, BSC, etc., formés par ces arêtes en sont *les faces*.



Le polyèdre est dit *convexe* ou à *angles saillants*, quand chacun des angles dièdres est moindre que 180°. Il est dit *concave* ou à *angles rentrants*, quand un ou plusieurs des angles dièdres est plus grand que 180°.

On appelle :

Angle trièdre le plus simple qui a trois faces ;

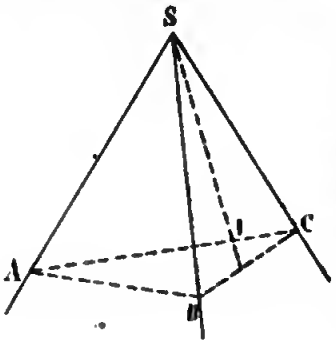
Angle tétraèdre celui qui en a quatre ;

Angle pentaèdre celui qui en a cinq ; etc.

L'angle trièdre est l'élément de décomposition des angles polyèdres, comme le triangle est celui des polygones.

Théorème 23. — *Dans tout angle trièdre une face quelconque est plus petite que la somme des deux autres.*

Il est évident qu'il est suffisant de démontrer la proposition pour la plus grande face. Ainsi soit ASC la plus grande face, je dis qu'on aura : ASC > ASB + BSC.

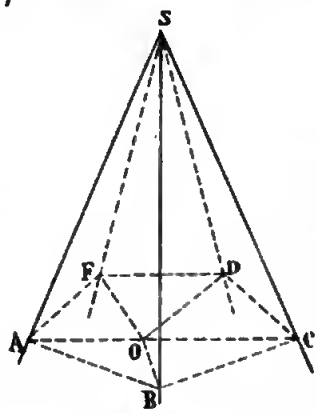


Faisons dans l'angle ASC avec SC un angle CSI égal à l'angle BSC ; menons par le point quelconque I pris sur SI une droite quelconque qui coupe SA, SC aux points A' et C', par exemple. Prenons SB = SI et joignons le point B aux points A et C. Les deux triangles SIC et SBC étant égaux

comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, donnent CI = CB. Or, dans le triangle ABC on a : AC ou AI+IC < AB+BC, ou bien en retranchant d'une part IC et de l'autre son égal BC : AI < AB. D'ailleurs AI et AB peuvent être considérés comme côtés, l'un du triangle ASI et l'autre du triangle ASB qui ont les deux autres côtés égaux chacun à chacun ; donc l'angle ASI est plus petit que l'angle ASB, ajoutant chacun de ces angles à ISC et BSC, on aura :

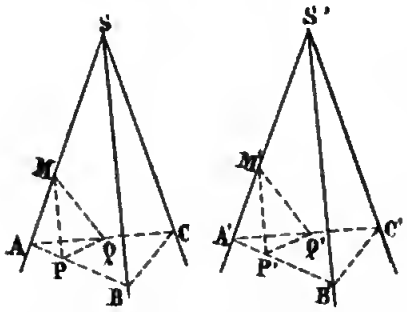
$$ASI + ISC \text{ ou } ASC < ASB + BSC.$$

Théorème 24. — *Dans tout angle polyèdre convexe, la somme des angles plans ou des faces est plus petite que* 360°.



Coupons toutes les arêtes de l'angle solide S par un plan quelconque et soit ABCDF le polygone de section. Joignons un point quelconque O pris dans l'intérieur à tous les sommets de ce polygone, et observons que nous formons ainsi autant de triangles groupés autour du point O qu'il y en a de groupés autour du point S, que par conséquent la somme des angles du premier groupe de triangles est égale à la somme des angles du second. Or, la somme des angles en O est égale à quatre droits ou 360°. Si nous prouvons que la somme des angles à la base des triangles qui ont leur sommet commun en O est plus petite que celle des angles à la base des triangles qui ont leur sommet commun en S, il faudra par compensation que la somme des angles en S soit plus petite que 360°. Or, en A, par exemple, il y a un angle trièdre formé des trois angles plans BAF, BAS, FAS, dans lequel on a : FAB < BAS + FAS, et ainsi des autres sommets B, C, D, F. En ajoutant toutes les inégalités analogues à celle-ci, on arriverait à la conclusion.

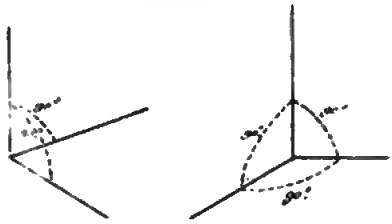
Théorème 25. — *Si deux angles trièdres ont les faces égales chacune à chacune, les dièdres opposés aux faces égales sont égaux.*



Soient S et S' les deux angles trièdres en question, ASB A'S'B' ; BSC, B'S'C' ; ASC, A'S'C' les faces homologues. Prenons les trois arêtes SA, SB, SC égales et arbitraires, les trois arêtes S'A', S'B', S'C' égales aux premières. Joignons ces points deux à deux. Prenons sur SA une longueur SM arbitraire et sur SA' une longueur égale. En M élevons à l'arête SA dans les deux faces adjacentes les perpendiculaires MQ, MP ; joignons PQ. Construction analogue en M'. Les deux triangles ASC, A'S'C' sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. Il en est de même des triangles ASB, A'S'B' et BSC, B'S'C'. Par suite les deux triangles ABC, A'B'C' seront aussi égaux comme ayant les trois côtés égaux. Donc si on applique ASC sur son égal A'S'C', ces deux triangles coïncideront ainsi que MQ et M'Q'. Il en est de même des triangles ASB, A'S'B' dans lesquels MP coïncidera avec M'P', et par suite des triangles ABC, A'B'C' dans lesquels PQ couvrira exactement P'Q'. Donc les deux triangles MPQ, M'P'Q' seront égaux comme ayant les trois côtés égaux et l'angle M qui mesure le dièdre opposé à la face BSC sera égal à l'angle M' qui mesure le dièdre opposé à la face égale B'S'C'. Même démonstration pour les deux autres dièdres.

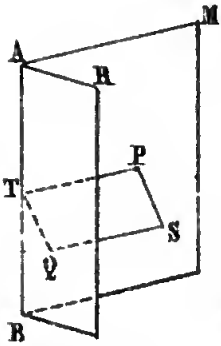
Scholie 1. — Observons que dans la figure dont nous nous sommes servi, les faces égales sont semblablement disposées et que par suite les dièdres le sont aussi. Il pourrait se faire que les faces soient inversement disposées, le théorème précédent n'en aurait pas moins lieu, et la démonstration précédente s'appliquerait encore à la nouvelle figure.

Les angles trièdres qui ont les faces égales mais inversement disposées s'appellent *trièdres symétriques*.



Scholie 2. — Si deux des plans sont perpendiculaires au troisième sans l'être entre eux, l'angle trièdre s'appelle *birectangle*. Si les trois plans sont perpendiculaires deux à deux, l'angle trièdre est dit *trirectangle*.

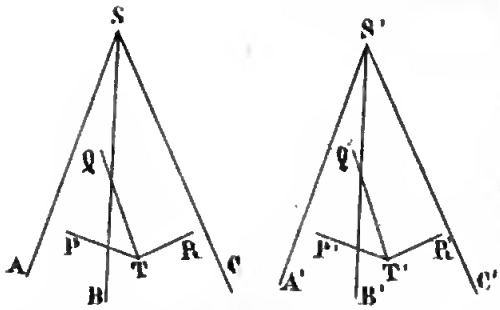
Théorème 26.— *Réciproquement si deux angles trièdres ont les dièdres égaux chacun à chacun, les faces opposées aux dièdres égaux sont égales.*



Principe. — Si d'un point quelconque pris dans un angle dièdre on abaisse une perpendiculaire sur chacun des deux plans qui le forment, l'angle de ces deux perpendiculaires sera supplémentaire de l'angle rectiligne qui mesure le dièdre.

Soient SP, SQ les deux perpendiculaires en question; conduisons un plan par les trois points P, Q, S, et soit T son intersection avec l'arête AB, joignons TP, TQ. Dans le quadrilatère PSQT, les angles P et Q sont droits, donc $T + S = 180°$. La proposition sera donc démontrée si nous prouvons que l'angle T mesure le dièdre. Or, de ce que le plan passe par SP perpendiculaire au plan BM, il est perpendiculaire à ce dernier; par une raison analogue, il l'est au plan BR et par conséquent à leur intersection AB. Donc les angles ATP et ATQ sont droits, et les droites TP et TQ forment l'angle qui mesure le dièdre.

Ce principe posé, abaissons d'un point quelconque T pris dans l'un des angles trièdres proposés S, des perpendiculaires sur chacune des faces, et faisons de même dans l'autre S'. Les trois perpendiculaires TR, TQ, TP donneront lieu à un nouvel angle trièdre dont les angles plans seront supplémen-

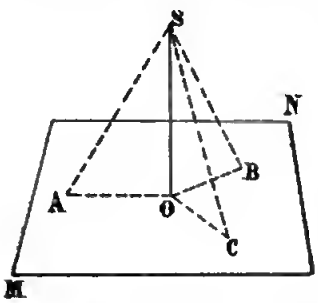


taires des angles dièdres du trièdre S. Conclusion analogue pour le trièdre T'. Or, les dièdres des angles trièdres S et S' sont égaux chacun à chacun; donc les faces des angles trièdres T et T' qui en sont les suppléments sont égales chacune à chacune, et, d'après la proposition précédente, leurs dièdres homologues seront égaux. Mais à leur tour, les angles trièdres S et S' ont leurs arêtes perpendiculaires aux faces des angles trièdres T et T', donc leurs faces seront aussi supplémentaires des dièdres des angles trièdres T et T', et comme ceux-ci sont égaux chacun à chacun, ces faces seront égales chacune à chacune, et cela quand même les angles solides proposés seraient symétriques.

FIN DU CINQUIÈME LIVRE.

PROBLÈMES DU CINQUIÈME LIVRE.

Problème 1. — *Abaisser une perpendiculaire sur un plan d'un point donné hors de ce plan.*



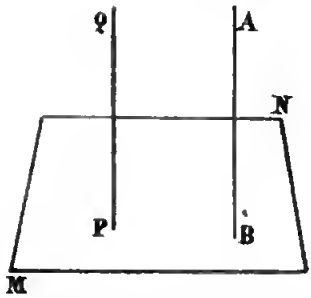
Analyse. — Soit SO cette perpendiculaire. Si nous considérons trois points A, B, C situés dans le plan donné MN et équidistants du pied O; les obliques SA, SB, SC qui en résulteront, seront égales. Donc si on détermine d'avance ces trois obliques, la trace O de la perpendiculaire devra être équidistante de leurs pieds A, B, C, et sera par conséquent le centre de la circonférence qui passe par ces trois points. Ces obliques sont arbitraires, car si on avait pris les trois points A, B, C plus ou moins éloignés du point O, quoique toujours équidistantes de ce point dans leurs nouvelles positions, les trois obliques eussent été plus ou moins grandes.

Synthèse. — Prenez sur le plan trois points équidistants du point S. Cherchez le centre O de la circonférence qui passe par ces trois points, joignez ce centre et le point S, vous aurez le point demandé.

Cas particulier. — Si le plan donné est horizontal, la perpendiculaire est une verticale et elle est donnée par la direction du fil aplomb.

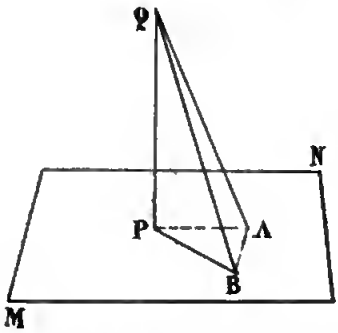
Problème 2. — *Elever d'un point donné sur un plan une perpendiculaire à ce plan.*

Analyse. — Soit PQ cette perpendiculaire, sa parallèle AB



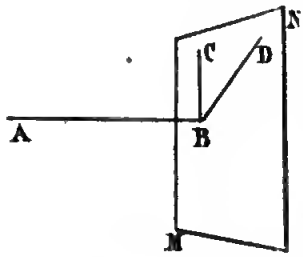
sera aussi perpendiculaire au plan MN. Or, la droite AB étant connue, la perpendiculaire PQ le sera elle-même.

Synthèse.— D'un point quelconque A, abaissez une perpendiculaire au plan MN et par le point donné P, menez-lui une parallèle. A cet effet faites passer un plan par AB et le point P, puis opérez comme il a été dit dans le second livre.



En pratique, on se sert d'une double équerre dont on fait coïncider les deux côtés PA, PB de l'angle droit avec le plan, le sommet commun P des angles droits avec le point et l'arête commune PQ donne la perpendiculaire.

Problème 3. — *Abaisser d'un point hors d'une droite un plan perpendiculaire à cette droite.*

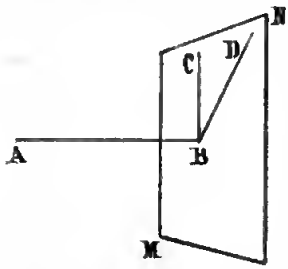


Analyse.— Soit MN ce plan, alors en joignant le point donné C au pied B de la droite donnée, CB sera perpendiculaire à AB. Toute autre droite BD tracée par le pied B dans le plan sera perpendiculaire à AB. Or, comme on peut déterminer d'avance ces deux droites, elles fixeront la position du plan.

Synthèse. — Conduisons un plan par AB et le point C, abaissons de ce point une perpendiculaire sur AB. Par la même droite AB, menons un autre plan quelconque et élevons par le point B une perpendiculaire BD à AB dans ce plan. Conduisons un plan suivant CB et DB, ce sera le plan demandé.

Problème 4. — *Elever d'un point donné sur une droite un plan perpendiculaire à cette droite.*

Analyse. — Elle conduirait, par un raisonnement analogue au précédent, au procédé suivant.

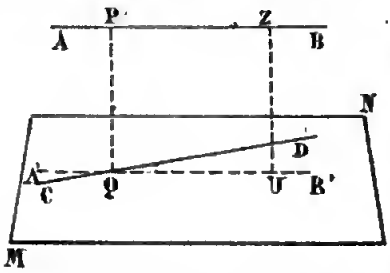


Synthèse. — Conduisez suivant AB deux plans quelconques ; par le point B donné, élevez dans chacun d'eux une perpendiculaire. Soient BC l'une et BD l'autre. Le plan qui passera par CB et BD sera le plan demandé.

La double équerre dont il a déjà été question, ayant son arête placée le long de AB de manière que le sommet commun aux deux angles droits coïncide avec le point donné B, déterminera le plan demandé par les deux autres côtés des angles droits.

Si la droite est verticale, le niveau placé dans deux positions successives telles que pour chacune d'elles, la droite horizontale qu'il détermine passe par le point donné, servira à donner le plan *.

Problème 5. — *Trouver la plus courte distance de deux droites non situées dans le même plan.*



Analyse. — Soient AB et CD les deux droites données, PQ leur plus courte distance. Elle sera évidemment perpendiculaire aux deux droites. Car si elle était oblique à l'une d'elles, la perpendiculaire abaissée sur celui-ci du point de rencontre avec l'autre serait plus petite, ce qui est contre l'hypothèse. La droite PQ étant perpendiculaire à AB le sera à sa parallèle A'B', et comme elle l'est à CD, elle le sera au plan MN qui passe par ces deux droites ;

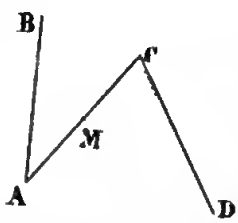
* Manière de placer de niveau la planchette dans les levers.

toute parallèle ZU à PQ le sera aussi. Or, le plan MN et la perpendiculaire ZU peuvent être déterminés en partant des données, alors PQ sera considérée comme une parallèle à ZU menée par le point d'intersection avec CD de A'B' parallèle à AB.

Synthèse. — Conduisez un plan MN parallèle à l'une des droites, AB, par exemple (ce qui se fera en menant par un point quelconque de CD une parallèle à AB, et en faisant passer un plan par cette parallèle et par CD). Abaissez d'un point quelconque Z de AB une perpendiculaire sur ce plan. Par son pied U menez une parallèle à AB, jusqu'à la rencontre de CD en Q, et par ce point Q menez une parallèle QP à UZ, elle rencontrera AB et sera la droite demandée.

Discussion. — Le problème est toujours possible. Si l'une des droites était verticale, la plus courte distance serait évidemment horizontale.

Problème 6. — *Faire passer par un point une droite qui rencontre deux droites données non situées dans le même plan.*



Analyse. — Soit AMC la droite cherchée qui passe par le point M et qui s'appuie en A et C sur les deux droites données en AB, CD. Elle sera évidemment contenue dans le plan qui passera par AB et le point M puisqu'elle y a deux de ses points A et M. Par la même raison elle sera aussi dans le plan qui passe par CD et le point M, donc elle ne sera autre que leur intersection.

Synthèse. — Faites passer un plan par AB et le point M, un autre par CD et le point M. Leur intersection sera la droite demandée.

Discussion. — Le problème est toujours possible, excepté dans le cas où le plan passant par le point et l'une des droites serait parallèle à l'autre droite.

APPLICATIONS.

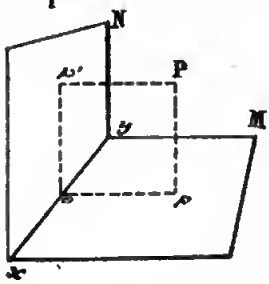
DU DESSIN DES CORPS PAR PROJECTIONS.

Tous les travaux des ingénieurs se réduisent à la résolution de ces deux problèmes : 1° *faire un lever*, c'est-à-dire représenter sur une feuille de dessin l'image rigoureuse d'un corps, de manière à pouvoir le reproduire exactement à l'aide de ce dessin ; 2° *faire un projet*, c'est-à-dire ayant conçu un corps, en faire le dessin et résoudre, à l'aide de ce dessin, tous les problèmes relatifs à l'exécution de ce corps.

Ces deux problèmes constituent à eux seuls la science de la *géométrie descriptive*, qu'on peut appeler *la langue de l'industrie*.

L'enseignement de cette science fait partie du cours de seconde année, et nous ne voulons exposer ici que les principes nécessaires à la représentation des corps définis en géométrie élémentaire.

Un corps, une surface, une ligne sont connus, quand on peut déterminer tous les points qui les composent. Il faut donc, avant tout, savoir fixer la position d'un point dans l'espace.



Pour cela, on considère deux plans qui se coupent à angle droit; l'un *horizontal* xM, l'autre *vertical* xN, et on suppose le point P de l'espace situé dans l'ouverture de cet angle dièdre. Si de ce point on abaisse une perpendiculaire sur le plan horizontal, le pied p de cette ligne est dit *la projection horizontale du point* P et la perpendiculaire Pp est *la ligne projetant horizontalement le point* P ; de même si l'on abaisse la perpendiculaire Pp sur le plan vertical xN, le pied p' est *la projection verticale du point* et Pp' *la ligne projetant verticalement le point* P.

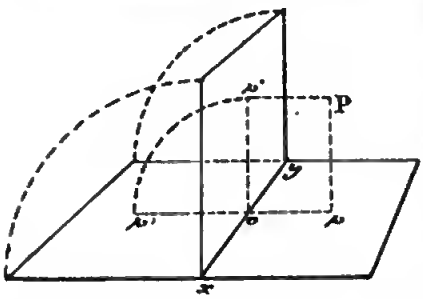
Si l'on conduit un plan par Pp et Pp', la figure P$p'op$ à

laquelle donne lieu ce plan par ses intersections avec les deux plans xM et xN dits *plans de projections* est évidemment un rectangle, et de plus ce plan est perpendiculaire aux deux plans de projections, par suite à leur intersection xy appelée *ligne de terre*. Donc 1° la distance du point P au plan horizontal est égale à la distance $p'o$ de sa projection verticale à la ligne de terre; 2° la distance Pp' du point P au plan vertical est égale à la distance po de sa projection horizontale à la ligne de terre; 3° si des deux projections d'un même point on abaisse des perpendiculaires po, $p'o$ sur la ligne de terre, elles la coupent en un même point.

Les deux projections d'un point en fixent la position dans l'espace.

En effet, le point doit se trouver sur une perpendiculaire élevée au plan xM par la projection horizontale p et à une distance égale à op'; donc en prenant $pP = op'$ on aura le point cherché P. On l'obtient aussi en prenant sur la perpendiculaire $p'P$ au plan xN la longueur $p'P$ égale à op. Enfin on peut encore l'obtenir en élevant en p et p' des perpendiculaires aux deux plans de projection, et comme on sait qu'elles sont dans un même plan, elles se coupent au point P.

Dans ce qui précède nous avons considéré deux plans. Pour ramener les constructions sur la feuille de dessin, on suppose que le plan vertical tourne autour de xy comme charnière pour se rabattre sur le prolongement du plan horizontal. Dans ce mouvement, la projection verticale est entraînée ainsi que la ligne op' qui vient se placer sur le prolongement de op, de sorte qu'après le rabattement les deux projections p, p' sont situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre. Deux points qui ne satisferaient pas à



cette condition ne seraient donc pas les projections d'un même point de l'espace.

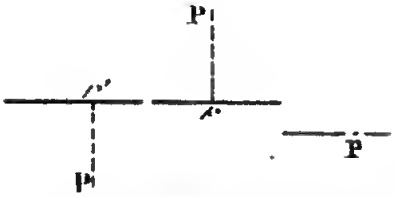
Nous avons figuré la perspective d'un angle dièdre vu de profil parce que les constructions que nous venons d'exposer s'y dessinent plus clairement. L'opérateur doit se supposer placé dans l'ouverture de ce dièdre, alors, après le rabattement, le point p est à ses pieds, et le point p' est dans la région du plan séparée de la sienne par la ligne de terre. Le rabattement, vu de face, présente donc la figure en marge.

Le dessinateur et l'appareilleur opèrent d'habitude leur dessin sur un plan horizontal, et alors pour déduire de ce dessin dit *épure* la position du point dans l'espace, il faut supposer le plan horizontal fixe, le plan vertical relevé à angle droit et la position du point P se figure mentalement par l'une des trois considérations précédentes.

L'élève qui s'exerce au tableau doit au contraire, pour déduire de son épure la position du point dans l'espace, supposer fixe le plan vertical et relever le plan horizontal à angle droit, puis avoir recours aux mêmes considérations.

Un point peut occuper plusieurs positions dans cet angle dièdre, elles se déduisent des positions de ses projections par rapport à la ligne de terre et réciproquement.

Si le point est sur l'un des plans, il est lui-même sa projection sur ce plan et son autre projection est sur la ligne de terre.

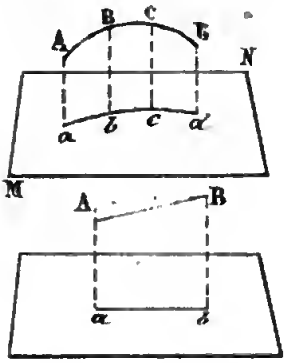


Si le point est sur la ligne de terre, il n'a pas d'autre projection que lui-même.

Nous désignons un point de l'espace par une lettre majuscule, ses projections par la même lettre minuscule (accentuée pour la projection verticale et non accentuée pour la projection horizontale).

Un point est connu quand on se donne ses projections et

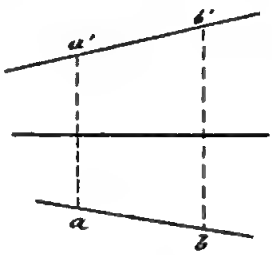
on les désigne souvent par la lettre majuscule pour abréger. De même trouver un point, c'est trouver ses projections.



Si de tous les points d'une ligne on abaisse des perpendiculaires au plan horizontal, le lieu géométrique de leurs pieds est la *projection horizontale* de cette ligne.

Si la ligne est droite, toutes ces perpendiculaires sont dans un même plan perpendiculaire au plan horizontal et son intersection avec ce plan est la projection de la droite. *Donc la projection d'une droite sur un plan est une ligne droite.*

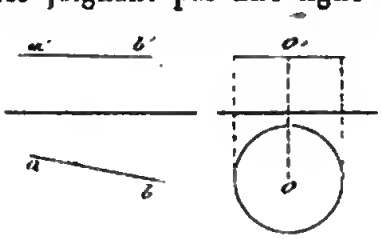
On obtient les deux projections d'une ligne en projetant cette ligne sur les deux plans de projection.



On obtient celles d'une droite en menant par cette droite deux plans perpendiculaires aux plans de projections; on les nomme *plan projetant horizontalement la droite* et *plan projetant verticalement la droite.* On peut aussi les obtenir en projetant deux de ses points.

Nous désignerons une droite de l'espace par deux lettres majuscules et ses projections par les mêmes lettres minuscules.

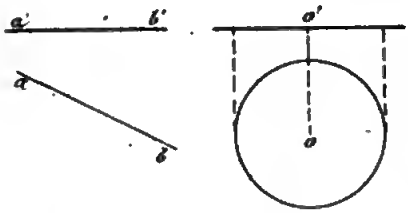
Une droite est déterminée par ses deux projections. Car en élevant par ab un plan perpendiculaire au plan horizontal, et par $a'b'$ un plan perpendiculaire au plan vertical, leur intersection détermine la droite **AB**. Ou bien cherchant les deux points dont a, a' et b, b' sont les projections, et les joignant par une ligne droite, on obtient aussi la droite de l'espace.



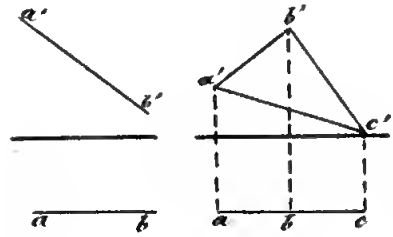
Une ligne peut occuper diverses positions dans l'angle dièdre.

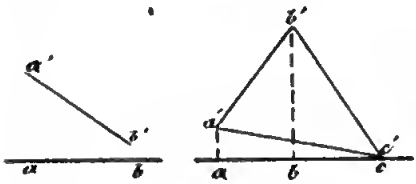
Si une droite ou une ligne plane est parallèle au plan

horizontal, sa projection sur ce plan lui est égale et parallèle, sa projection verticale est parallèle à la ligne de terre.

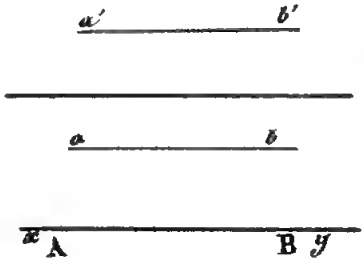


Si une droite ou une ligne plane est dans le plan horizontal, sa projection sur ce plan n'est autre que cette ligne, sa projection verticale se confond avec la ligne de terre.



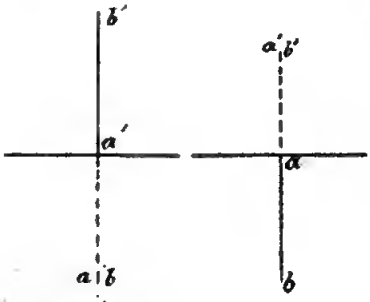


Théorèmes analogues par rapport au plan vertical.

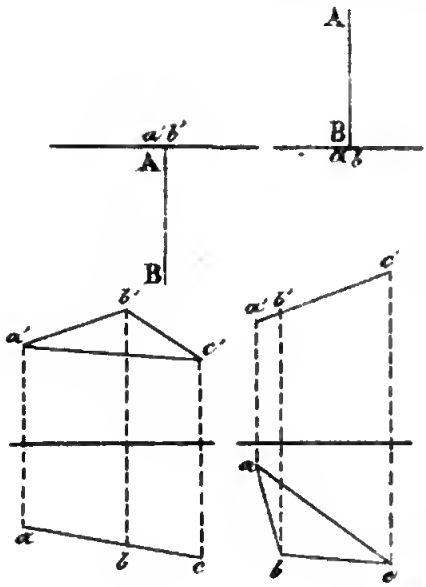


Si une droite est parallèle aux deux plans de projections, ses projections seront parallèles à la ligne de terre.

Si une droite se confond avec la ligne de terre, ses deux projections s'y confondront aussi.

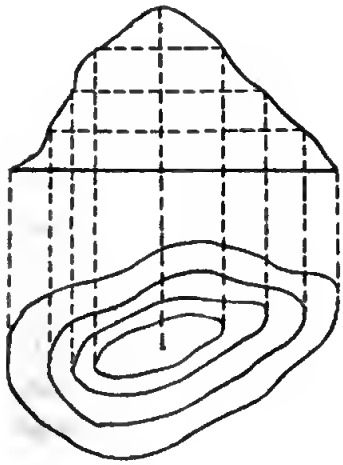


Si une droite est perpendiculaire à l'un des plans de projection, sa projection sur ce dernier sera un point et sa projection sur l'autre sera perpendiculaire à la ligne de terre.



Si une droite est perpendiculaire à l'un des plans et en même temps située dans l'autre, sa projection sur le premier se réduira à un point situé sur la ligne de terre, et sa projection sur l'autre sera perpendiculaire à la ligne de terre.

Si une ligne plane est dans un plan perpendiculaire à l'un des plans de projections, sa projection sur ce dernier sera une ligne droite.



Ces considérations suffisent pour la représentation rigoureuse des corps. C'est ainsi qu'en projetant horizontalement et verticalement les courbes d'intersection de plans horizontaux équidistants, on parvient à figurer un terrain de forme irrégulière et non susceptible de définition.

Si l'on sous-entend la distance des plans horizontaux, les projections horizontales des courbes suffiront pour représenter le terrain. Plus les courbes seront rapprochées, plus la pente du terrain sera rapide.

Souvent aussi on supprime les courbes horizontales, après avoir rempli leurs intervalles par des hachures. On convient que les parties horizontales conservent la teinte du papier.

Plus une pente est rapide, plus on serre les hachures en les forçant.

Dans l'arpentage des terrains, c'est la projection horizontale qu'on évalue, parce que, à égalité de projections horizontales, deux terrains de pentes différentes ne sont pas plus productifs l'un que l'autre.

FIN DES PROBLÈMES ET APPLICATIONS DU CINQUIÈME LIVRE.

LIVRE SIXIÈME.

DES DIFFÉRENTES ESPÈCES DE SURFACES.

Nous avons vu que les surfaces étaient les limites des corps. Elles peuvent être considérées comme engendrées par le mouvement d'une ligne de forme constante ou variable appelée *génératrice*, qui s'appuie sur une ou plusieurs lignes fixes appelées *directrices*.

Les surfaces qui se rencontrent le plus souvent dans les arts sont *les surfaces réglées* et *les surfaces de révolution*.

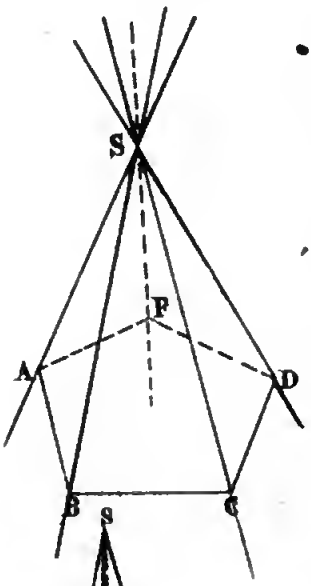
Les surfaces réglées sont ainsi nommées parce qu'elles sont engendrées par le mouvement d'une règle. On en distingue deux espèces : *les surfaces gauches* et *les surfaces développables*.

Les surfaces gauches sont celles dont l'élément de surface compris entre deux génératrices consécutives ne sont pas dans le même plan. Nous nous en occuperons spécialement dans le cours de géométrie descriptive.

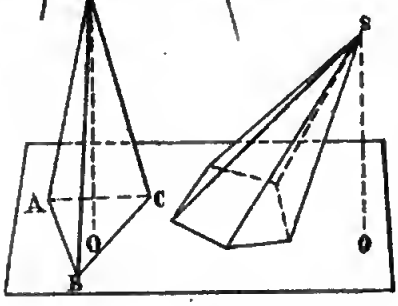
Les surfaces développables sont celles dont tous les éléments compris entre deux génératrices consécutives peuvent être réunis dans un même plan sans déchirure ni duplicature.

Les surfaces de révolution sont engendrées par le mouvement d'une ligne tournant autour d'une droite comme axe. La ligne qu'on obtient par l'intersection d'un plan passant par l'axe porte le nom de *méridien*, et celle qui résulte de la section d'un plan perpendiculaire à l'axe se nomme *un parallèle*. Cette dernière est toujours un cercle.

DES SURFACES PYRAMIDALES ET CONIQUES.

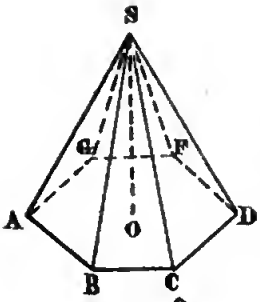


La surface pyramidale est engendrée par le mouvement d'une droite passant par un point fixe appelé *sommet* et glissant le long des côtés d'une ligne polygonale appelée *directrice*. La droite mobile est *la génératrice* et elle porte le nom *d'arête* quand elle passe par un sommet de la ligne polygonale. Cette surface est développable. Si la génératrice est illimitée dans les deux sens, chacune des portions de la surface séparée de l'autre par le sommet s'appelle *une nappe*.

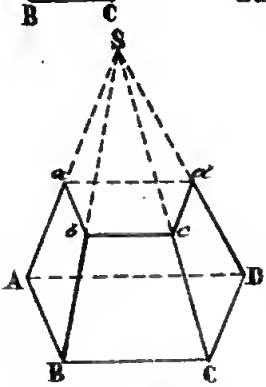


On nomme *pyramide* l'espace compris entre la surface pyramidale et un plan coupant toutes les arêtes. La section ABC, à laquelle donne lieu ce plan, est *la base* de la pyramide, et la hauteur est la perpendiculaire SO abaissée du sommet sur la base ou sur la base prolongée s'il est nécessaire.

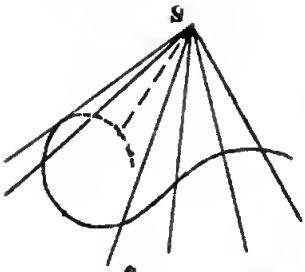
La pyramide est dite : *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonale*, etc., suivant que la base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, etc. Elle est dite *convexe* ou *concave* suivant que un ou plusieurs de ses angles dièdres sont plus grands ou plus petits que 180°.



Une pyramide est régulière quand la base est un polygone régulier et qu'en même temps la perpendiculaire abaissée du sommet sur son plan passe par le centre de cette base.

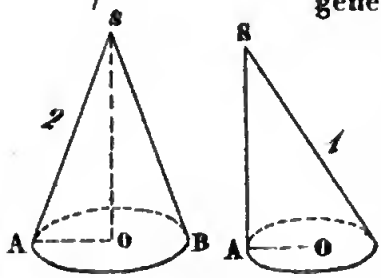


Une pyramide est dite tronquée quand on l'a coupée par un plan et qu'on en a retranché la portion qui aboutit au sommet. Si le plan coupant est parallèle à celui de la base, le reste est dit : *tronc de pyramide à bases parallèles*, et *la hauteur* du tronc est la distance des deux plans parallèles.



Si à la directrice de la surface pyramidale nous substituons une courbe, la surface prendra le nom de *surface conique*.

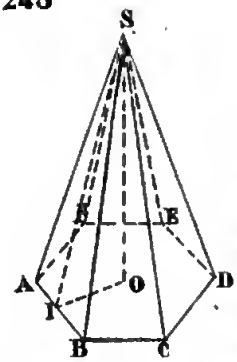
L'espace compris entre la surface conique et un plan coupant toutes les génératrices s'appelle *cône*.



Il est dit *à base circulaire*, quand sa base est un cercle, et *cône circulaire droit*, quand la base est un cercle et qu'en même temps la hauteur tombe au centre de cette base.

Ce dernier peut être considéré comme engendré par le mouvement d'un triangle rectangle SOA tournant autour d'un des côtés SO de l'angle droit comme *axe*.

Théorème 1. — *La surface convexe d'une pyramide régulière est égale à la moitié du produit du périmètre de sa base par l'apothème d'un des triangles qui concourent au sommet.*

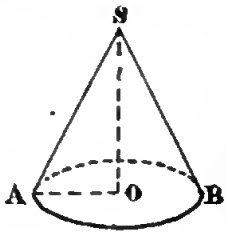


En effet, les triangles qui concourent en S sont tous égaux comme ayant les trois côtés égaux, savoir : les bases AB, BC, etc., égales comme côtés d'un polygone régulier, et les côtés adjacents SA, SB, SC, etc., égaux comme obliques s'écartant également du pied O de la perpendiculaire SO. Donc la surface latérale est égale à celle de six triangles égaux à ASB ou $\frac{6AB \times SI}{2}$; mais 6AB est le périmètre du polygone de base. Donc surface $= \frac{\text{périm.} \times SI}{2}$.

L'apothème SI peut être mesuré directement ou déduit par le calcul de l'une des deux considérations suivantes : SI peut être considéré comme un des côtés de l'angle droit du triangle rectangle SAI, qui a pour hypothénuse SA l'une des arêtes, et pour autre côté AI la moitié d'un des côtés de la base. Il est aussi l'hypothénuse du triangle rectangle SOI qui a pour côtés SO la hauteur de la pyramide et OI l'apoth[illegible] de la base.

Schoue. — Si la pyramide était irrégulière, on ferait la somme de tous les triangles latéraux pour évaluer la surface.

Théorème 2. — *Le cône circulaire droit a pour mesure de sa surface convexe la moitié du produit de la circonférence de sa base par la génératrice.*



Car le cône peut être considéré comme une pyramide régulière dont le polygone de base a un nombre infini de côtés infiniment petits, et dont l'apothème des faces latérales se confond avec la génératrice. Alors le théorème précédent étant indépendant du nombre des côtés du polygone de base sera encore applicable dans le cas du cône, et donnera lieu à l'énoncé.

Si nous désignons par R le rayon de la base et par g la

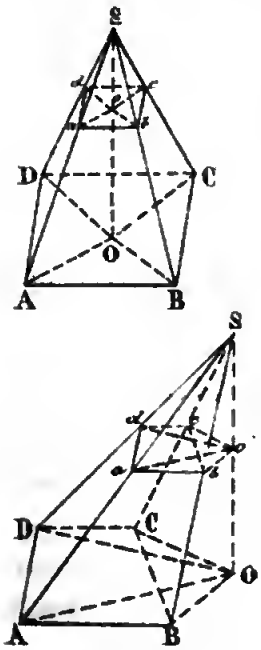
génératrice, la formule qui donnera la surface latérale sera :

$$\frac{2\pi R \times g}{2} \text{ ou } \pi . R \times g.$$

On peut mesurer la génératrice directement ou la déduire par le calcul de cette considération : elle est l'hypothénuse du triangle rectangle SBO dont SO est la hauteur du cône et BO le rayon de base.

Scholie. — Si le cône était oblique, on en ferait le développement par un procédé de géométrie descriptive, et on mesurerait approximativement ce développement.

THÉORÈME 3. — *Si une pyramide est coupée par un plan parallèle à sa base, 1° les côtés et la hauteur sont coupés en parties proportionnelles ; 2° la section est un polygone semblable à celui de la base.*



1° Soit *abcd* le polygone de section de la pyramide SABCD ; soient SO sa hauteur et S*o* celle de la petite pyramide. Joignons les pieds O et *o* de ces deux hauteurs aux sommets des polygones correspondants ; alors les droites AO, *ao* ; BO, *bo*, etc., seront parallèles comme intersections du plan de base et de celui de la section par chacun des plans SAO, SBO, etc. Donc les triangles SAO, S*ao* ; SBO, S*bo*, etc., seront semblables et donneront la suite de proportions :

$$SA : Sa :: SO : So$$
$$SB : Sb :: SO : So$$
$$SC : Sc :: SO : So$$
$$SD : Sd :: SO : So$$

Les premiers rapports étant tous égaux à SO : S*o*, donneront.

$$SA : Sa :: SB : Sb :: SC : Sc :: SD : Sd :: SO : So.$$

2° Les polygones ABCD, *abcd* ont leurs côtés homologues parallèles. Car AB et *ab* sont parallèles comme intersections

des plans de base et de la section par celui de la face SAB, et ainsi des autres. Donc déjà leurs angles seront égaux. Si nous démontrons la proportionnalité des côtés homologues, la similitude en résultera. Or, dans les triangles SAB, SBC, SCD, SDA, on a, à cause du parallélisme des côtés AB, *ab*; BC, *bc*; CD, *cd*; DA, *da*:

$$AB : ab :: SB : Sb :: SO : So$$
$$BC : bc :: SC : Sc :: SO : So$$
$$CD : cd :: SD : Sd :: SO : So$$
$$DA : da :: SA : Sa :: SO : So$$

A cause des rapports égaux SO : So les premiers rapports seront égaux, et nous aurons :

$$AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: DA : da.$$

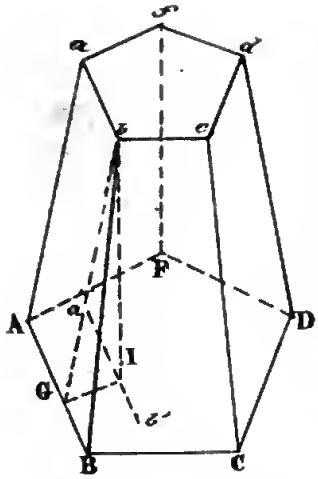
Corollaire 1. — *Si on coupe un cône parallèlement à sa base : 1° les génératrices seront coupées en parties proportionnelles ; 2° la courbe de section sera semblable à celle de la base.*

Corollaire 2. — *Les surfaces de la base et de la section seront entre elles comme les carrés des hauteurs des deux pyramides ou des deux cônes.*

Car les deux surfaces ABCD, *abcd* étant semblables, donneront : ABCD : *abcd* :: $AB^2 : ab^2$; mais on a d'ailleurs : AB : *ab* :: SA : *sa* :: SO : So, supprimant le rapport intermédiaire et élevant au carré, il vient : $AB^2 : ab^2 :: SO^2 : So^2$, proportion qui a un rapport commun avec la première et de la combinaison desquelles on tire : ABCD : *abcd* :: $SO^2 : So^2$.

Théorème 4. — *Un tronc de pyramide régulière à bases parallèles a pour mesure de sa surface latérale le produit de la demi-somme des périmètres des bases par l'apothème de l'une des faces latérales.*

Je dis d'abord que tous les trapèzes dont est formée cette surface latérale sont égaux et isocèles. Car si on prolonge les arêtes du tronc, on aura une pyramide régulière dont les faces seront par conséquent des triangles isocèles égaux, et si de chacune d'elles on retranche le triangle qui fait



partie de la face correspondante de la petite pyramide aussi régulière, les restes seront évidemment des trapèzes isocèles et égaux. Cela posé, la mesure de l'un d'eux sera : $\frac{AB + ab}{2} \times bG$, et comme il y a cinq faces dans la figure, la surface latérale entière sera :

$$5 \times \frac{AB + ab}{2} \times bG.$$

Or, $5 \times \frac{AB + ab}{2}$ est la demi-somme des périmètres des bases, car cette expression peut se mettre sous la forme : $\frac{5AB}{2} + \frac{5ab}{2}$; bG est la hauteur d'un des trapèzes ou son apothème. L'expression tout entière peut donc se mettre sous la forme :

$$\frac{\text{périm. } ABCDF + \text{périm. } abcdf}{2} \times bG.$$

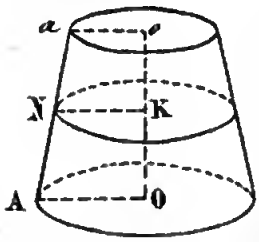
L'apothème bG peut être mesuré directement ou déduit par le calcul de l'une des deux considérations suivantes : On peut regarder bG : soit comme l'un des côtés du triangle rectangle bGB, dont bB, une des arêtes du tronc, est l'hypothénuse, et GB, demi-différence des côtés parallèles du trapèze, est l'autre côté ; soit comme hypothénuse du triangle rectangle BGI dont GI, distance de AB à la projection horizontale $a'b'$ de ab, serait l'un des côtés de l'angle droit, et bI, hauteur du tronc, serait l'autre côté.

Scholie. — Si le tronc ne provenait pas d'une pyramide régulière, les trapèzes ne seraient généralement plus égaux et il faudrait évaluer les surfaces de chacun d'eux pour les ajouter.

THÉORÈME 5. — *Le tronc de cône droit circulaire à bases parallèles a pour mesure de sa surface convexe l'une des deux expressions suivantes :*

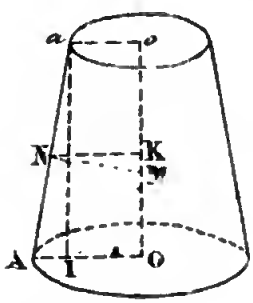
1° *Le produit de la demi-somme des deux circonférences de bases par la génératrice ;*

2° *Le produit, par la hauteur du tronc, de la circonférence qui aurait pour rayon la perpendiculaire élevée sur le milieu de la génératrice jusqu'à la rencontre de l'axe* *



1° Car le tronc de cône peut être considéré comme un tronc de pyramide régulière dont les trapèzes sont infiniment étroits et dont l'apothème se confond par conséquent avec l'arête qui est ici la génératrice. On pourra donc appliquer à l'évaluation de sa surface convexe le théorème précédent, puisqu'il a lieu quel que soit le nombre des faces, et on aura : Surf. $= \frac{\text{cir. AO} + \text{cir. } ao}{2} \times Aa$ ou $\frac{2\pi R + 2\pi r}{2} g$, en appelant R et r les rayons de bases et g la génératrice. Cette formule se simplifie et donne : $\pi(R+r) \times g$. $\pi(R+r)$ est l'expression de la circonférence NK qu'on obtient en coupant le cône par un plan parallèle aux bases, mené au milieu de la generatrice aA. Car dans le trapèze aoAO on a : NK $= \frac{AO + ao}{2}$ ou $\frac{R+r}{2}$. Donc la circonférence qui a pour rayon NK vaudra :

$$2\pi\left(\frac{R+r}{2}\right) \text{ ou toute simplification faite } \pi(R+r).$$



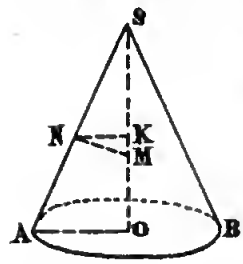
2° Du point N, milieu de Aa, élevons à cette génératrice, dans le plan du trapèze aoAO, la perpendiculaire NM jusqu'à la rencontre de l'axe ; puis du point a abaissons sur la grande base la perpendiculaire aI. Il résultera de cette construction les deux triangles aAO et MNK semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires. Leurs côtés homologues donnent lieu à la

* Cette seconde expression est utile dans le mesurage de la surface de la sphère.

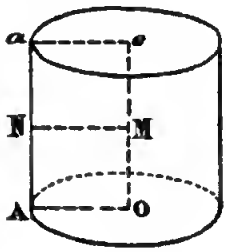
proportion : NM : aA :: NK : aI, d'où on tire : NK $\times$ aA = NM $\times$ aI. Multiplions les deux membres par 2π, il vient :

$$2\pi \times \text{NK} \times a\text{A} = 2\pi \times \text{NM} \times a\text{I}.$$

Or, le premier membre donne la première expression de la surface convexe du tronc de cône, le second membre qui lui est égal donne la seconde.



Si on suppose que la base supérieure soit nulle, le tronc de cône sera un cône proprement dit auquel on pourra appliquer le même mode de mesurage. On pourrait d'ailleurs le démontrer directement.



Enfin si la base supérieure est égale à la base inférieure, le tronc de cône sera *un cylindre* et la circonférence qui a pour rayon NM ne sera autre que celle de la base. D'où nous pouvons déjà conclure par anticipation que : *La surface convexe d'un cylindre circulaire droit est égale au produit de la circonférence de la base par la hauteur.*

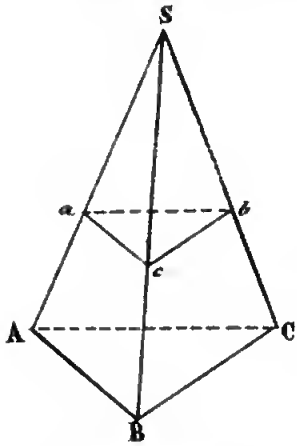
Scholie. — Si on se sert de la première expression de la mesure du tronc de cône, on pourra mesurer la génératrice aA (fig. 2) directement ou la déduire par le calcul par la considération suivante : elle est l'hypothénuse du triangle rectangle qui a pour côtés de l'angle droit aI ou la hauteur du tronc et AI la différence des deux rayons.

SIMILITUDE DES PYRAMIDES TRIANGULAIRES.

Deux pyramides triangulaires sont dites semblables quand elles ont toutes leurs arêtes proportionnelles et que les faces formées par les arêtes homologues sont semblablement disposées.

Il suit de cette définition que deux pyramides triangulaires semblables ont leurs faces semblables chacune à chacune, comme triangles ayant les côtés homologues proportionnels ; que les angles plans qui forment les angles solides sont égaux

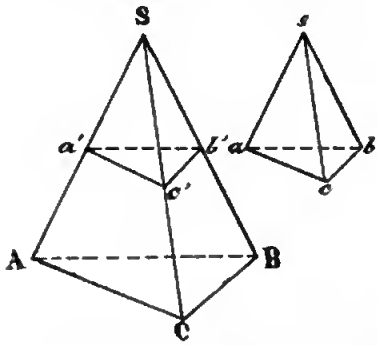
et semblablement disposés, que par conséquent les angles dièdres et par suite les angles trièdres le sont aussi.



Réciproquement si les faces sont semblables et semblablement disposées, les pyramides seront semblables. Car la similitude des faces entraîne la proportionnalité des arêtes.

Il suit encore de cette définition que si on coupe une pyramide triangulaire par un plan parallèle à l'une des faces, la petite pyramide qui en résultera sera semblable à la grande. Car toutes les arêtes homologues sont évidemment proportionnelles.

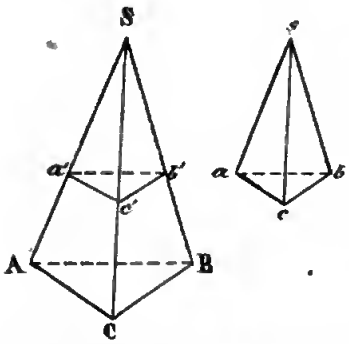
Théorème 6. — *Deux pyramides triangulaires sont semblables quand elles ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables et semblablement disposées.*



La proposition sera démontrée si nous prouvons que la petite peut être placée sur la grande de manière que les arêtes d'un sommet coïncident et que la face opposée soit parallèle à celle de la grande.

Soient SAC, *sac*; SAB, *sab* les faces semblables qui comprennent les dièdres égaux. Je prends sur SA une longueur S*a'* égale à *sa*, et par le point *a'* je mène un plan *a'c'b'* parallèle à ABC, la petite pyramide S*a'c'b'* qui en résulte est semblable à la grande; il reste à prouver qu'elle est égale à *sacb*. Or, les deux triangles S*a'b'* et *sab* étant semblables à SAB, le premier par construction et le second par hypothèse, seront semblables entre eux, et comme ils ont un côté égal *sa* = S*a'*, ils sont égaux. Il en est de même des deux triangles S*a'c'* et *sac*, et comme les deux dièdres compris sont égaux, les deux pyramides S*a'b'c'* et *sabc* appliquées l'une sur l'autre coïncideront.

Théorème 7. — *Deux pyramides triangulaires sont semblables quand elles ont une face semblable adjacente à trois dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*



Soient SAC, *sac* les deux faces semblables ; appliquons *sac* sur SAC et soit S*a'c'* sa nouvelle position, conduisons suivant *a'c'* un plan parallèle à ACB, la petite pyramide S*a'b'c'* qui résulte est semblable à la grande. Il faut donc prouver qu'elle est égale à *sabc*. Les deux pyramides *sabc* et S*a'b'c'* ont les trois dièdres adjacents aux faces *sac* et S*a'c'* égaux à ceux de la pyramide SABC adjacents à la face SAC, la première par hypothèse et la seconde parce qu'elle a les dièdres correspondants aux arêtes S*a'*, S*c'* communs avec ceux de la face SAC, et celui qui correspond à *a'c'* égal à celui qui correspond à AC comme superposables. Donc ces deux pyramides ont les trois dièdres en question égaux chacun à chacun, et comme les faces S*ac*, S*a'c'* adjacentes à ces dièdres sont égales, elles sont superposables.

Théorème 8. — *Deux pyramides triangulaires sont semblables lorsqu'elles ont leurs angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

Car de l'égalité des angles dièdres pris trois à trois, et de leur similitude de position, on conclut l'égalité des angles plans qui forment les faces homologues, et de l'égalité de ces angles plans on conclut la similitude des faces et leur similitude de position, par suite la proportionnalité des arêtes homologues.

RÉSUMÉ.

Deux pyramides triangulaires sont semblables :

1° Quand les arêtes homologues sont proportionnelles et que les faces formées par ces arêtes sont semblablement disposées (c'est la définition) ;

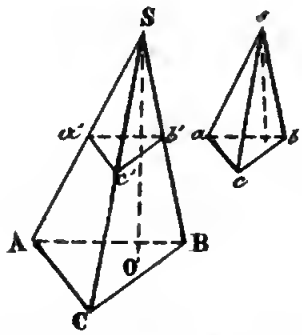
2° Quand les faces sont semblables et semblablement disposées ;

3° Quand elles ont un dièdre égal compris entre deux faces semblables chacune à chacune et semblablement disposées ;

4° Quand elles ont une face semblable adjacente à trois dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés ;

5° Quand elles ont leurs dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.

Théorème 9.— *Deux pyramides triangulaires semblables ont des surfaces proportionnelles aux carrés des arêtes homologues, ou aux carrés des hauteurs.*



Car si on applique la petite sur la grande et si on suppose que SO et *so* soient leurs hauteurs, on aura :

$SAC : Sa'c' :: SA^2 : Sa'^2$

$SBC : Sb'c' :: SC^2 : Sc'^2$

$SBA : Sb'a' :: SB^2 : Sb'^2$

$ABC : a'b'c' :: AB^2 : a'b'^2 :: SB^2 : Sb'^2$

mais les seconds rapports sont tous égaux à $SO^2 : so^2$ comme on l'a vu au corollaire 2 du théorème 3, nous aurons donc :

$$SAC : Sa'c' :: SBC : Sb'c' :: SBA : Sb'a' :: ABC : a'b'c',$$

d'où

$$SAC+SBC+SBA+ABC : Sa'c'+Sb'c'+Sb'a'+a'b'c' :: ABC : abc$$

ou

$$:: SB^2 : Sb'^2 :: SO^2 : so^2,$$

ou bien

$$S : s :: SB^2 : sb^2 :: SO^2 : so^2.$$

S et *s* désignant les surfaces de la grande et de la petite pyramide.

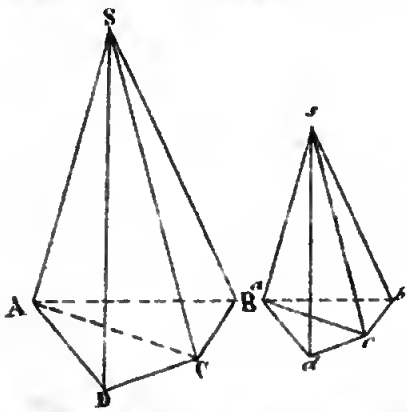
SIMILITUDE DES POLYÈDRES.

On appelle *polyèdres* les corps terminés par des surfaces planes. On considère particulièrement en géométrie les po-

lyèdres *convexes*, c'est-à-dire ceux dont chacun des angles dièdres est moindre que 180°.

Deux polyèdres sont dits semblables quand ils sont composés d'un même nombre de pyramides triangulaires semblables et semblablement disposées.

THÉORÈME 10. — *Deux polyèdres semblables ont le même nombre de faces; ces faces sont semblables chacune à chacune, semblablement disposées; les angles dièdres sont égaux et les angles polyèdres aussi.*

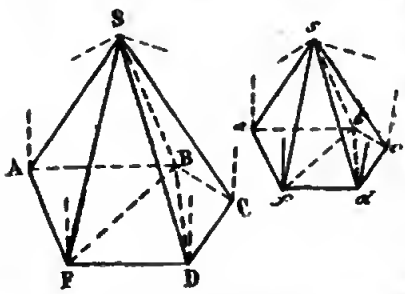


Considérons en effet les deux pyramides semblables et homologues SABC et *sabc* qui entrent dans la formation des polyèdres semblables. De leur similitude, nous déduisons celle des faces ABC, *abc* que nous supposons appartenir à celles des polyèdres. Donc déjà dans l'hypothèse où les faces des polyèdres seraient des triangles, elles seront semblables. Pour démontrer qu'elles le seront encore dans l'hypothèse où elles seraient des polygones, nous démontrerons d'abord l'égalité des angles dièdres homologues des polyèdres. A cet effet supposons qu'il s'agisse des dièdres formés des arêtes AC, *ac* des faces ou portions de faces ABC et ADC, *abc* et *adc*. La similitude des pyramides triangulaires SABC, *sabc* nous permet de déduire celle des triangles SAC, *sac* et l'égalité des dièdres formés des faces adjacentes ABC, *abc*; SAC, *sac* de ces mêmes pyramides. Considérons actuellement ADC, *adc* comme les bases de deux pyramides triangulaires SADC, *sadc* adjacentes aux deux premiers et par conséquent semblables; alors ces bases sont semblables et les deux dièdres formés des faces adjacentes semblables SAC, ADC; *sac*, *adc* sont égaux. Donc les dièdres AC, *ac* des polyèdres sont égaux comme composés chacun des deux dièdres égaux des pyramides triangulaires partielles Actuel-

lement si les faces ABC, ADC sont dans un même plan, leur angle dièdre sera de 180°; les deux faces semblables *abc*, *adc* formeront un dièdre égal et seront par conséquent aussi dans un même plan. Donc les quadrilatères ABCD et *abcd* sont semblables comme composés de deux triangles semblables et semblablement disposés. Démonstration analogue en considérant les deux derniers triangles et leurs adjacents, dans le cas où les faces seraient des polygones plus compliqués que des quadrilatères. On prouverait aussi de même que toutes les autres faces sont semblables, et comme on les prend dans le même ordre pour démontrer leur similitude, elles sont semblablement disposées.

Théorème 11. — *Réciproquement deux polyèdres sont semblables quand ils ont leurs faces semblables chacune à chacune et semblablement disposées et également inclinées.*

Pour le démontrer il faut prouver qu'ils sont décomposables en pyramides triangulaires semblables et semblablement disposées. A cet effet menons des plans par un sommet S du premier polyèdre, et par chacune des arêtes des faces non adjacentes à ce sommet; par le sommet *s* homologue du second polyèdre faisons la même opération. Nous décomposerons ainsi chaque polyèdre en autant de pyramides qu'il y a de faces non adjacentes au sommet. Il faudra prouver que ces pyramides sont elles-mêmes décomposables en pyramides triangulaires semblables et semblablement disposées.



Pour cela considérons deux de ces pyramides que je supposerai pentagonales. Soient SAB, *sab* deux triangles homologues appartenant à deux faces semblables des polyèdres, adjacentes aux sommets S et *s*, et servant de faces latérales aux pyramides SABCDF, *sabcdf* qui ont pour bases ABCDF, *abcdf*. Menons les diagonales FB, DB; *fb*, *db*, et conduisons des plans par chacune de

ces diagonales et les sommets. Les deux pyramides triangulaires SABF, *sabf* résultant de cette construction, seront semblables comme ayant un dièdre égal compris entre deux faces semblables et semblablement placées, savoir : les faces SAB, *sab* semblables comme triangles homologues appartenant à des polygones semblables qui servent de faces aux polyèdres. Même raisonnement pour les deux triangles ABF, *abf*. Les dièdres compris sont égaux comme dièdres des polyèdres. De la similitude de ces deux pyramides on conclut celle des deux faces SBF, *sbf* et l'égalité des dièdres que forment ces deux triangles avec les bases ABF, *abf*. Si on retranche chacun de ces dièdres de ceux de 180° que forment les triangles ABF, *abf* avec les suivants BFD, *bdf*, il restera les deux dièdres formés par les faces adjacentes SFB, FBD ; *sfb*, *fbd* semblables chacune à chacune. Donc les deux pyramides triangulaires SFBD et *sfbd* sont encore semblables en vertu du même caractère que les précédentes. On démontrerait de même la similitude des deux autres SBDC, *sbdc*, par suite la similitude des faces communes avec les pyramides voisines, et l'égalité des dièdres de ces faces avec celles qui servent de bases à ces mêmes pyramides sur lesquelles on raisonnera alors comme sur les premières, et ainsi de suite.

Théorème 12. — *Les surfaces de deux polyèdres semblables sont entre elles comme les carrés des arêtes homologues.*

Car elles sont décomposables en pyramides triangulaires semblables dont certaines faces servent d'éléments de formation à celles des polyèdres. Comme ces faces élémentaires sont entre elles comme les carrés de leurs arêtes homologues ou de celles des polyèdres, leurs sommes ou les surfaces des polyèdres seront dans le même rapport.

DE L'ÉGALITÉ ET DE LA SYMÉTRIE DES POLYÈDRES.

Si dans les théorèmes relatifs à la similitude des pyramides triangulaires et des polyèdres, nous remplaçons la propor-

tionnalité des côtés ou la similitude des faces par leur égalité, les autres conditions demeurant les mêmes, nous aurons la série des théorèmes relatifs à l'égalité des pyramides triangulaires et des polyèdres.

Mais comme on peut former deux pyramides triangulaires aveo quatre faces, si on ne prescrit pas l'ordre dans lequel elles doivent être assemblées, il faut toujours qu'il y ait entre deux pyramides : similitude de disposition dans les faces, pour qu'elles soient superposables ; autrement elles sont dites *symétriques*.

Ainsi en résumé, nous appelons *pyramides triangulaires symétriques* celles qui ont leurs faces égales chacune à chacune, mais inversement disposées.

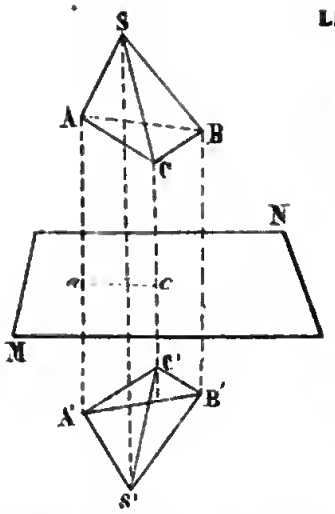
La considération précédente fait voir qu'une pyramide triangulaire n'a qu'une seule symétrique.

Deux polyèdres sont dits symétriques lorsqu'ils sont composés d'un même nombre de pyramides triangulaires symétriques et inversement disposées.

Il résulte de là que deux polyèdres symétriques ont le même nombre de faces ; ces faces sont égales chacune à chacune, inversement disposées et les angles dièdres égaux chacun à chacun ; les angles polyèdres ne sont pas superposables ; et réciproquement.

Cette propriété et sa réciproque se démontreraient comme les théorèmes 10 et 11, dans lesquels on substituerait les expressions : *égales* à *semblables* et *inversement disposées* à *semblablement disposées*.

Théorème 13. — *Si de tous les sommets d'un polyèdre supposé décomposé en pyramides triangulaires, on abaisse des perpendiculaires sur un plan quelconque et qu'on les prolonge au-delà de ce plan de quantités égales à elles-mêmes, les extrémités de ces perpendiculaires seront les sommets d'un nouveau polyèdre décomposable en un même nombre de pyramides symétriques des premières et inversement disposées.*



Soient S, A, B, C, quatre des sommets du polyèdre proposé ; S', A', B', C', les quatre sommets analogues du polyèdre construit comme le prescrit l'énoncé. Je dis d'abord que les pyramides triangulaires formées par ces quatre sommets et leurs analogues ont les faces égales. Car l'arête AC, par exemple, est égale à l'arête A'C' : en effet, replions le trapèze *ac*A'C' autour de *ac* comme charnière pour le rabattre sur le trapèze *ac*AC. Ils coïncideront, car A*a* perpendiculaire au plan MN prendra la direction de A'*a* aussi perpendiculaire à ce plan, et comme A*a* = A'*a* le point A coïncidera avec A'. Il en sera de même des points C et C'. Donc A'C' coïncidera avec AC. Il en sera de même de toutes les autres arêtes, et alors les triangles A'B'C', A'S'C', etc., qui forment la pyramide triangulaire S'A'B'C' sont égaux aux triangles ABC, ASC, etc., qui forment la pyramide SABC. L'inspection de la figure fait reconnaître qu'ils sont inversement disposés ; donc les deux pyramides sont symétriques. Les pyramides adjacentes le sont en vertu des mêmes raisonnements. On reconnaît également qu'elles sont inversement disposées.

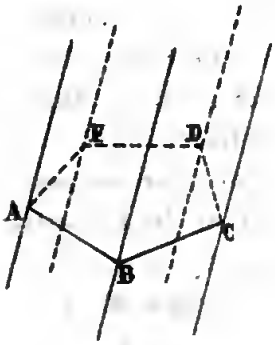
Scholie. — Les arêtes égales et leurs extrémités analogues sont dites *symétriques*.

Théorème 14. — *Réciproquement deux polyèdres symétriques peuvent toujours être disposés de manière que leurs sommets soient situés deux à deux sur une même perpendiculaire à un plan, et à égales distances de ce plan.*

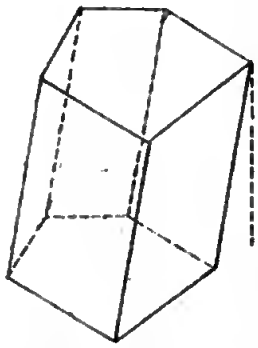
Car si on appelle S et S' les deux polyèdres en question, et si on construit un polyèdre S'' par des perpendiculaires abaissées des sommets du premier S sur un plan de symétrie et prolongées de quantités égales à elles-mêmes, ce polyèdre

sera composé d'un même nombre de pyramides triangulaires que le polyèdre S'; elles seront égales à celles de ce même polyèdre et semblablement disposées. Donc les polyèdres S'' et S' seront égaux. Par conséquent le polyèdre S' pourra être substitué au polyèdre S''.

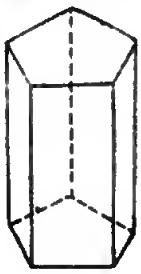
DES SURFACES PRISMATIQUES ET CYLINDRIQUES.



On appelle *surface prismatique* celle qui est engendrée par une droite se mouvant parallèlement à sa direction primitive le long des côtés d'une ligne polygonale appelée *directrice*. La droite mobile s'appelle *génératrice*, et quand elle passe par un des sommets du polygone elle prend le nom d'*arête*.



On nomme *prisme* l'espace compris entre la surface prismatique et deux plans parallèles coupant toutes les arêtes. Ces deux plans constituent les deux bases du prisme, et sont des polygones égaux. En effet, les côtés de ces polygones sont parallèles comme provenant chacun de l'intersection de deux plans parallèles par chacune des faces de la surface prismatique; donc déjà les angles sont égaux et les côtés sont aussi égaux comme droites parallèles comprises entre les arêtes qui sont parallèles. Il résulte de ce raisonnement que les faces latérales du prisme sont des parallélogrammes.

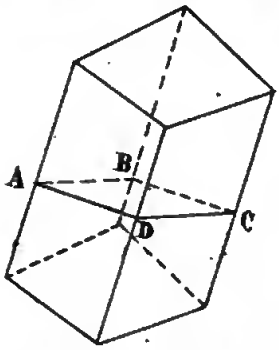


La hauteur d'un prisme est la distance de ses deux bases ou la perpendiculaire abaissée d'un point de la base supérieure sur la base inférieure ou sur son plan prolongé.

Un prisme est dit *droit* quand les plans de bases sont perpendiculaires à la génératrice ou

aux arêtes. Dans ce cas, la hauteur est égale à l'une des arêtes.

Il est oblique quand la génératrice ou l'une des arêtes est oblique par rapport aux plans de bases.

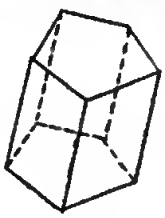


Dans tout prisme oblique on appelle *la section droite* le polygone de section d'un plan perpendiculaire aux arêtes. Ce polygone a évidemment ses côtés perpendiculaires aux arêtes. Cette propriété donne le moyen de la construire en n'opérant que sur le contour du prisme.

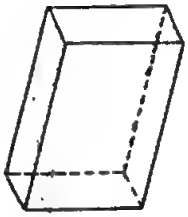
Un prisme est dit concave ou convexe suivant que un ou plusieurs des angles dièdres des faces latérales sont plus grands ou plus petits que 180°.

Il est dit *triangulaire, quadrangulaire, pentagonal,* etc., suivant que la base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, etc.

Le prisme est *régulier* s'il est droit et si les bases sont des polygones réguliers.

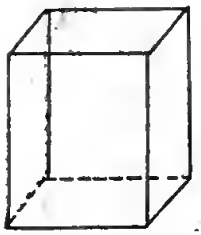


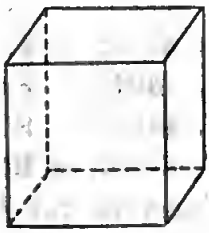
Si les plans des deux bases ne sont pas parallèles, le solide porte le nom de *prisme tronqué* ou *tronc de prisme.*



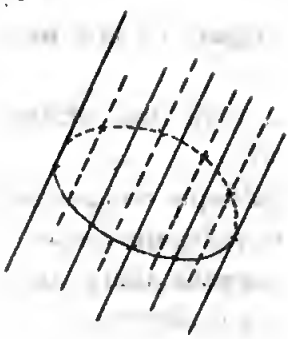
Si les deux bases d'un prisme quadrangulaire sont des parallélogrammes, il porte le nom de *parallélipipède.* Toutes ses faces sont des parallélogrammes.

Le parallélipipède est dit *rectangle* quand les deux bases sont des rectangles ; alors toutes les faces sont des rectangles. Il est dit *cube* quand toutes ses faces sont des carrés.



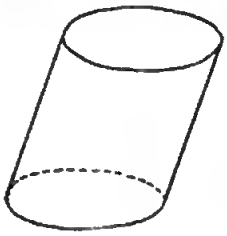


Si à la ligne polygonale



directrice nous substituons une courbe, la surface indéfinie prendra le nom de *surface cylindrique*.

L'espace compris entre la surface cylindrique et deux plans parallèles coupant toutes les génératrices s'appelle *cylindre*.

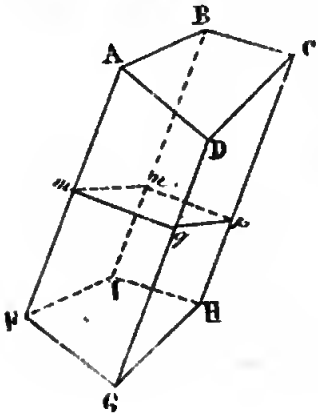


Les deux courbes de section sont égales. Car on peut considérer une surface cylindrique comme une surface prismatique dont les côtés de la directrice sont infiniment petits, et alors le raisonnement relatif à cette surface s'applique encore ici.

Il est dit *à base circulaire* quand sa base est un cercle, et *cylindre circulaire droit* quand la base est un cercle et que de plus les plans de bases sont perpendiculaires à la génératrice.

Ce dernier peut être considéré comme engendré par le mouvement d'un rectangle tel que OABI tournant autour d'un de ses côtés OI comme axe.

Théorème 15. — *La surface latérale d'un prisme est égale au produit du périmètre de sa section droite par une arête.*



Soit *mnpq* la section droite du prisme ABCDFGHI ; chacun de ses côtés étant perpendiculaire aux arêtes qu'il rencontre, on aura :

Surf. ADGF = FA × *mq*
Surf. ABIF = FA × *mn*
Surf. BIHC = HC × *np*
Surf. GHDC = HC × *pq*.

Si nous observons que FA = HC et si

nous ajoutons en mettant FA en facteur commun, il vient :

$$\text{Surf. ADGF} + \text{ABIF} + \text{etc.}$$

ou

$$\text{Surf. prism.} = \text{FA} \times (mn + np + pq + mq).$$

Scholie. — Si le prisme est droit, la section droite n'est autre que la base, et alors la surface prismatique a pour mesure le produit du périmètre de la base par l'arête.

THÉORÈME 16. — *La surface latérale d'un cylindre quelconque est égale au produit du périmètre de la section droite par sa génératrice.*

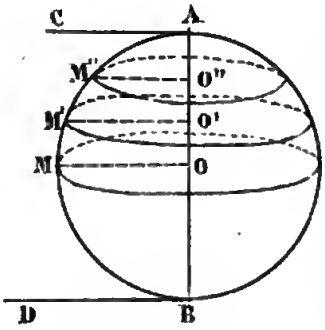
Car un cylindre peut être considéré comme un prisme dont la base est un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits, et comme la démonstration précédente est indépendante du nombre des côtés de la section droite, elle sera encore applicable au cylindre.

Scholie. — Si le cylindre est droit, sa section droite n'est autre que la base.

S'il est droit circulaire, la formule de la mesure de sa surface convexe sera évidemment : $2\pi R \times H$ (R étant le rayon de base et H la hauteur).

DE LA SPHÈRE.

La *sphère* est une surface de révolution engendrée par le mouvement d'une demi-circonférence tournant autour de son diamètre comme axe.



Si nous considérons les tangentes à la demi-circonférence aux extrémités A et B du diamètre qui sert d'axe, et les perpendiculaires MO, M'O', M''O'' abaissées des différents points M, M', M'' pris sur la circonférence, chacune de ces perpendiculaires engendrera un plan perpendiculaire à l'axe qui portera le nom de *parallèle*.

Celui de chacune des tangentes AC, BD sera tangent à la surface, c'est-à-dire n'aura qu'un point commun avec cette surface. Les points M′ et M″ décriront *des petits cercles* dans leurs plans, et le point M situé sur la perpendiculaire MO qui passe par le centre de la sphère engendrera *un grand cercle* qui aura pour rayon celui de la circonférence primitive. Les points A et B sont équidistants des différents points d'un même parallèle et en sont dits les *pôles*. Les distances de chacun d'eux au grand cercle MO, mesurées sur le contour de la génératrice AMB, sont égales au quart d'un grand cercle appelé *un cadran*. Les distances de ces deux points aux autres parallèles sont plus grandes ou plus petites qu'un cadran. La surface comprise entre deux parallèles s'appelle *zône*. Si l'un d'eux est tangent, elle prend le nom de *calotte sphérique*. Si l'un est un grand cercle et l'autre tangent, elle se nomme *un hémisphère*.

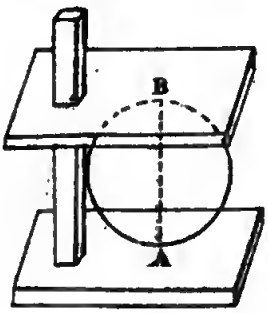
De ces considérations nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

La sphère a tous ses points équidistants du centre. Ces distances se nomment *rayons*.

Tous les diamètres de la sphère ou cordes passant par le centre sont égaux.

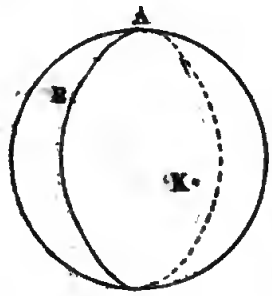
Tout plan tangent à la sphère est perpendiculaire à l'extrémité du rayon qui passe par le point de contact, et réciproquement.

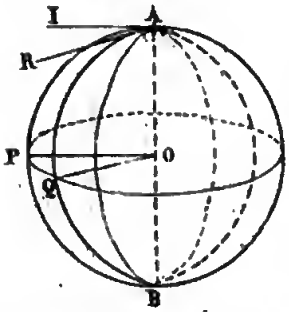
Tout plan coupe la sphère suivant un cercle dont on a le centre en abaissant sur ce plan une perpendiculaire du centre de la sphère. Les extrémités de cette perpendiculaire limitée à la sphère seront les pôles de ce cercle et de tous ses parallèles.



La distance de deux plans parallèles tangents à la sphère est égale au diamètre, et de là dérive le moyen de connaître le rayon de la sphère, par suite la circonférence d'un grand cercle, la corde d'un cadran.

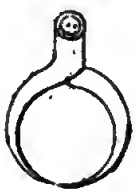
Si sur un point quelconque pris sur la surface sphérique on applique la pointe d'un compas sphérique et qu'on fasse mouvoir l'autre pointe autour de la première fixée sur la surface, elle décrira un cercle dont la pointe fixe sera le pôle. Si la distance des deux pointes est égale à la corde d'un cadran, ce cercle sera un grand cercle et divisera la sphère en deux parties égales *.





Pour dessiner un grand cercle passant par deux points donnés sur la sphère, on déterminera un point K distant des deux points donnés A et B d'un cadran, et de ce point comme pôle avec la même ouverture de compas on décrira un grand cercle. Ce dernier passera par les deux points donnés. Si les deux points donnés sont en ligne droite avec le centre, les deux arcs de cercle qui déterminent le point K se confondront évidemment en un seul qui ne sera autre que le grand cercle POQ, perpendiculaire au diamètre AB ; alors de chacun des points pris sur ce cercle comme pôle, on pourra décrire des arcs de cercle avec une ouverture de compas égale à un cadran. Tous ces grands cercles passeront par les points donnés et la question sera indéterminée.

La surface comprise entre deux demi grands cercles se nomme *un fuseau*, et l'angle dièdre des deux plans de ces grands cercles se mesure, conformément à ce qui est prescrit, par l'angle rectiligne des deux perpendiculaires OP, OQ élevées à l'intersection AB, au centre O de la sphère, ou par l'arc PQ décrit du centre O avec OP pour rayon. Mais comme la plupart du temps on ne peut pas



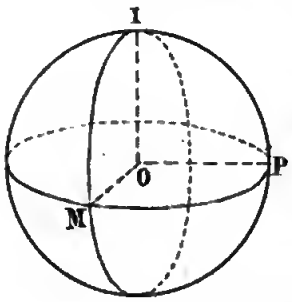
* Le compas sphérique n'est autre qu'un compas ordinaire dont les branches sont courbées comme l'indique la figure.

opérer dans la sphère, cet arc pourra être décrit, à l'extérieur, du point A comme pôle avec une ouverture de compas sphérique égale à un cadran. Car les angles POA et QOA étant droits, les arcs PA et QA sont des cadrans. Enfin, on pourra également mesurer ce dièdre par l'angle rectiligne des deux tangentes AI, AR à ces deux arcs menées au point A. Car ce sont aussi des perpendiculaires à l'intersection.

Pour trouver les pôles d'un grand cercle PQ dessiné sur la sphère en n'opérant que sur son contour, on décrira de deux points quelconques P, Q pris sur ce grand cercle comme pôles, des arcs de cercle avec une ouverture de compas égale à un cadran. Les deux points de rencontre A, B qu'on obtiendra, répondront à la question. Car les pôles cherchés, étant distants d'un cadran des deux points pris sur le grand cercle donné, serviraient à tracer ce dernier par le procédé qui vient d'être exposé, pour faire passer un arc de grand cercle par deux points donnés.

Pour tracer un arc de grand cercle perpendiculaire à un arc de grand cercle donné :

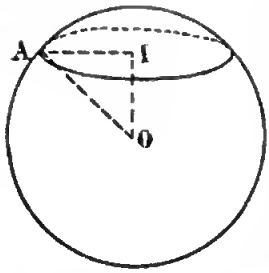
1° Le point étant donné sur l'arc.



Il faut prendre sur l'arc donné MP, à partir du point M donné, un point P distant de ce dernier d'un cadran, et se servir de ce point P comme pôle pour décrire avec la même ouverture de compas l'arc MI, qui répondra à la question.

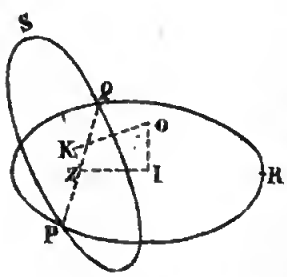
En effet, joignons le centre de la sphère et les points M et P, prenons MI égal à un cadran, joignons I et le centre de la sphère. Les trois angles plans en O sont droits comme ayant pour mesure des cadrans, donc l'angle IOP mesure le dièdre des grands cercles MP, MI : donc ce dièdre est droit.

2° Si le point est hors du cercle, on prend sur le cercle donné un point distant d'un cadran du point donné, et on opère comme précédemment.



Si l'on joint le centre O de la sphère au centre I d'un petit cercle et à un point quelconque A de ce dernier, on aura un triangle rectangle AIO duquel on tirera la relation : $AO^2 = AI^2 + IO^2$ ou $R^2 = r^2 + d^2$ (R désignant le rayon de la sphère, r celui du petit cercle et d la distance du centre de la sphère à celui du petit cercle). Si deux petits cercles ont le même rayon r, la relation $d^2 = R^2 - r^2$, tirée de la première, fait voir que d sera le même. Donc *deux cercles égaux sont équidistants du centre.* Si dans l'un r est plus grand que dans l'autre, la différence $R^2 - r^2$ sera plus petite. Donc *de deux cercles tracés sur la même sphère, le plus grand est plus près du centre.* Les réciproques de ces deux propriétés se déduisent des deux directes par l'absurde.

Théorème 17. — *Par quatre points non situés dans un même plan, on peut toujours faire passer une sphère et on n'en peut faire passer qu'une.*



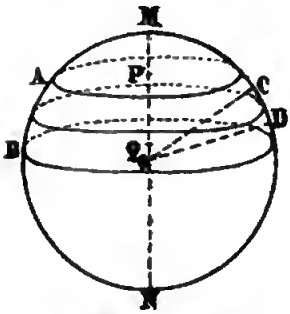
Soient P, Q, R, S, les quatre points donnés ; faisons passer un cercle par les trois premiers, et élevons par le centre une perpendiculaire au plan de ce cercle. Opérons de même avec deux des trois points précédents P, Q et le quatrième S. Le point de rencontre des deux perpendiculaires IO, KO sera le centre de la sphère, et la distance de ce centre à l'un des quatre points donnés sera le rayon. Pour le démontrer, il suffit de prouver que les quatre distances OQ, OP, OR, OS sont égales. Or, les trois premières le sont comme obliques équidistantes du pied I de la perpendiculaire IO. Les trois dernières le sont par la même raison. Donc elles sont toutes quatre égales.

Pour que les perpendiculaires KO, IO se rencontrent, il

faut qu'elles soient dans le même plan et cela a toujours lieu. Car si nous abaissons les perpendiculaires KZ, IZ sur la corde commune, elles se rencontreront au milieu Z de cette corde. Le plan KZI sera donc perpendiculaire à PQ, par suite aux deux plans des cercles : par conséquent KO et IO s'y trouveront situées.

Les constructions ne donnent qu'un centre et qu'un rayon. Donc il n'y a qu'une sphère qui réponde à la question*.

Théorème 18. — *La surface d'une zône est égale au produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle, et celle de la sphère est égale au produit de son diamètre par la même circonférence.*



Soient ABCD la zône en question, PQ sa hauteur ou la distance des centres des cercles de bases. Imaginons un méridien quelconque BMCD passant par PQ prolongée, et des parallèles très-rapprochés le long de la hauteur PQ. La surface de la zône sera alors décomposée en une suite de petites zônes qui pourront sensiblement être assimilées à des troncs de cône très-minces. Si nous adoptons pour mesurer la surface de chacun d'eux le second procédé, c'est-à-dire le produit de la hauteur par la circonférence d'un cercle qui aurait pour rayon la perpendiculaire élevée au milieu de chacun des petits arcs, qui donnent en somme l'arc AB du méridien, jusqu'à la rencontre de l'axe PQ ; et si nous remarquons que chacune de ces perpendiculaires passe par le centre O du méridien ou de la sphère et n'est autre que le rayon de la sphère, nous aurons à ajouter la suite de termes :

$$2\pi R \times h + 2\pi R \times h' + 2\pi R \times h'' + \text{etc.}$$

(h, h', h'' désignant les hauteurs de ces petits troncs). Cette

* Sphéromètre de Cauchoix.

somme donne :

$$2\pi R\,(h + h' + h'' + \text{etc.}).$$

Or, remarquons que $h + h' + h'' + \text{etc.} = PQ$. Alors la mesure sera donnée par $2\pi R \times PQ$.

S'il s'agit de mesurer la surface de la sphère, nous la considérerons comme une zône qui a pour hauteur un diamètre ou 2R; alors si nous substituons 2R à la place de PQ dans la formule précédente, elle deviendra :

$$2\pi R \times 2R \text{ ou } 4\pi R^2.$$

Comme πR^2 est la surface d'un grand cercle, on dit aussi que *la surface de la sphère est égale à quatre fois celle d'un grand cercle.* Cette surface est exprimée au moyen du diamètre par πD^2 (D étant le diamètre). En effet, $R = \frac{D}{2}$ d'où $R^2 = \frac{D^2}{4}$. Remplaçant R^2 par cette valeur dans la formule $4\pi R^2$, elle devient : $\frac{4\pi D^2}{4}$ ou πD^2.

Corollaire 1.—Les considérations précédentes, appliquées à la recherche de la mesure de la calotte sphérique, donneraient lieu au même théorème.

Corollaire 2. — Toutes les zônes de même hauteur dans une même sphère sont équivalentes.

THÉORÈME 19. — *Le fuseau a pour mesure de sa surface le produit de la surface de la sphère par le rapport de l'angle des deux méridiens à* 360°.

Il est évident que la surface du fuseau croît proportionnellement à l'angle de ses deux méridiens. En désignant par S sa surface et par A son angle, on aura donc :

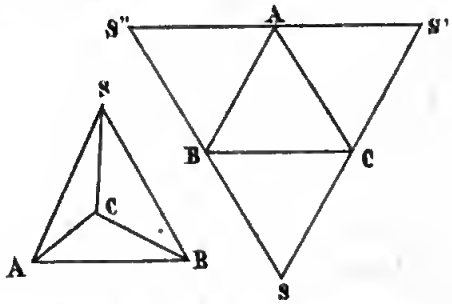
$$S : \text{sphère} :: A : 360^\circ, \text{ d'où } S = \frac{\text{sphère} \times A}{360^\circ}.$$

DES POLYÈDRES RÉGULIERS.

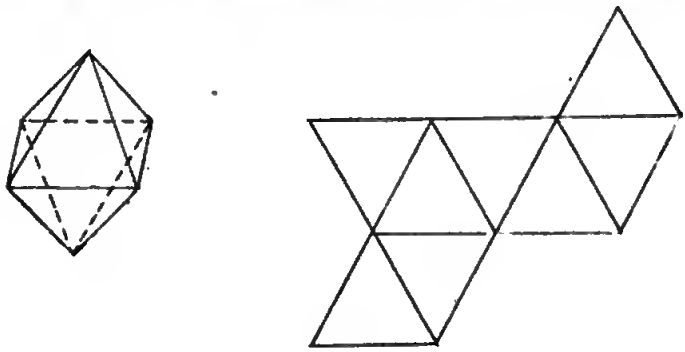
On appelle *polyèdres réguliers* ceux dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux et dont tous les angles polyèdres sont égaux.

THÉORÈME 20. — *Il ne peut y avoir que cinq polyèdres réguliers.*

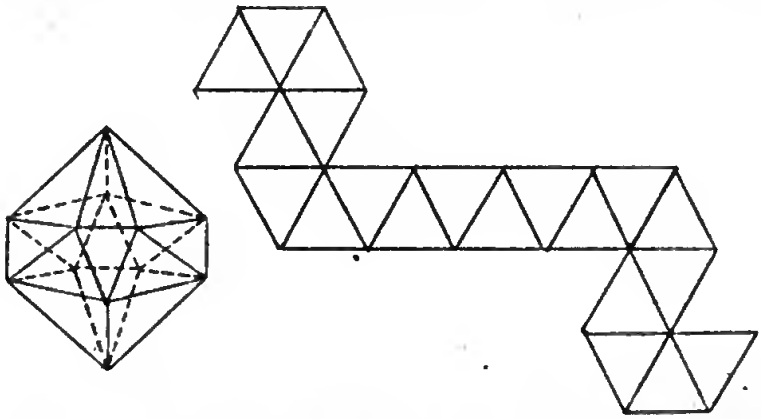
Car nous avons vu qu'il fallait au moins trois angles plans pour former un angle solide. On ne peut donc former de polyèdres réguliers avec des hexagones ni avec des polygones d'un plus grand nombre de côtés. Car l'angle au sommet de l'hexagone est de 120° et trois fois 120° donnent 360° qui est la limite de la somme des angles plans d'un angle solide convexe. Les polygones d'un plus grand nombre de côtés donnent des angles plus obtus. Le triangle équilatéral, le carré et le pentagone régulier sont donc les seuls polygones qui puissent former des polyèdres réguliers. L'angle au sommet du triangle équilatéral est de 60°. Or, trois fois, quatre fois et cinq fois 60° donnent des produits moindres que 360°. Donc on pourra former trois polyèdres réguliers avec le triangle équilatéral. L'un aura ses angles solides formés de trois angles de 60° et aura quatre faces; pour cette raison il portera le nom de *tétraèdre* régulier. Son développement sera formé de quatre triangles équilatéraux qui en formeront un grand.



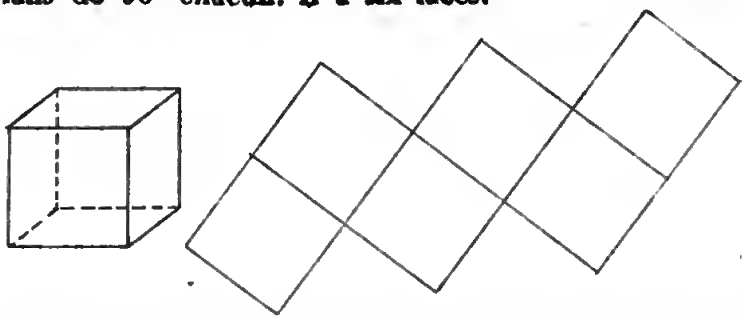
Le second aura ses angles solides formés de quatre angles de 60°, et il aura huit faces ou triangles équilatéraux dont on figure ici le développement. C'est l'*octaèdre*.



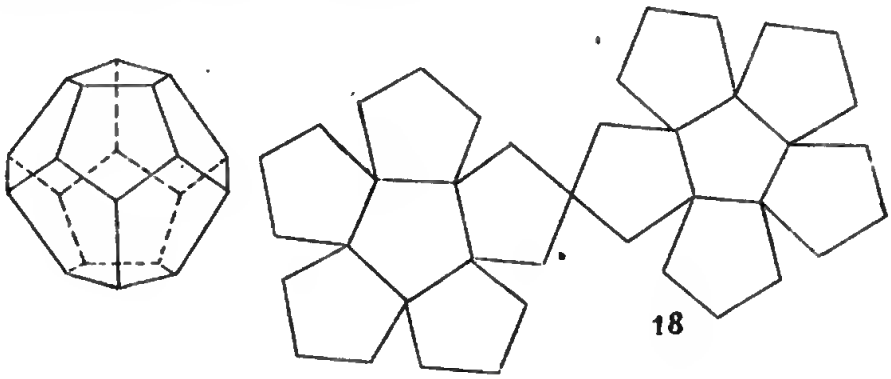
Les angles solides du troisième seront formés de cinq angles plans de 60°, et il aura vingt faces. Voyez ici sa perspective et son développement. Il se nomme l'*icosaèdre*.



Le seul polyèdre régulier formé du carré est le cube ou *hexaèdre*. Ses angles solides sont formés de trois angles plans de 90° chacun. Il a six faces.



Le pentagone régulier donne lieu à un polyèdre de douze faces, appelé *dodécaèdre*. Ses angles solides sont formés de trois angles plans de 108° chacun.



Scholie. — Les développements des surfaces des polyèdres réguliers servent à les construire lorsqu'ils doivent être creux. Mais si l'on veut les déduire d'une substance massive, l'un des moyens à employer consisterait à dresser une face plane, y tracer l'un des polygones constituants, à dresser une face adjacente pour y tracer le polygone égal adjacent et ainsi de suite. A cet effet il faut connaître les angles dièdres de deux faces adjacentes dans chacun des polyèdres. De la propriété des polyèdres réguliers d'être inscriptibles dans une sphère, et d'une relation entre les angles dièdres et l'angle solide de chacun d'eux, on a pu déduire que : 1° *Tous les dièdres d'un même polyèdre régulier sont égaux ;* 2° Que *le dièdre du tétraèdre est de* 70° 31′ 43″,6 ; *celui de l'hexaèdre de* 90° ; *celui de l'octaèdre de* 109° 28′ 16″,4 ; *celui du dodécaèdre de* 116° 33′ 54″,2 ; *celui de l'icosaèdre de* 158° 10′ 37″,2.

Toutefois ce procédé n'est pas le meilleur. La géométrie descriptive nous donnera un procédé plus commode et plus exact en pratique.

FIN DU SIXIÈME LIVRE.

EXERCICES SUR LE SIXIÈME LIVRE.

1. Dessiner en projections une pyramide régulière hexagonale ayant sa base sur le plan horizontal. Le côté de l'hexagone de base a $1^m,30$, la hauteur de la pyramide est de $2^m,80$. Calculer l'arête et l'apothème. Mesurer sa surface convexe et la développer.

Le développement s'obtiendra en décrivant un arc de cercle indéfini avec l'arête pour rayon et en y inscrivant six fois le côté de la base, puis joignant le centre et les points de division (fig. 1).

Nota. Consultez pour ce tracé et les suivants les figures de la planche.

2. Dessiner en projections un cône circulaire droit ayant sa base sur le plan horizontal. Son rayon sera de $1^m,20$, sa hauteur de $2^m,60$. Calculer la génératrice. Mesurer sa surface convexe et la développer.

Pour le développement, on inscrira, dans le cercle de base, un polygone régulier d'un assez grand nombre de côtés pour que chacun d'eux se confonde sensiblement avec l'arc qu'il sous-tend ; on décrira avec la génératrice pour rayon un arc de cercle indéfini et on y portera la suite des petits côtés du polygone inscrit dans la base. On joindra au centre les points de division extrêmes (fig. 2).

On peut aussi limiter cet arc indéfini en traçant, au moyen du rapporteur, l'angle au centre correspondant. Il sera donné par la proportion : $2\pi R : 2\pi r :: 360^\circ : x$. C'est-à-dire la circonférence entière, qui a pour rayon la génératrice R, est à son arc, qui est égal au développement du cercle de base de rayon r, comme 360° est à l'angle cherché. Cette

proportion se simplifie et devient :

$$R : r :: 360^\circ : x, \text{ d'où } x = \frac{360 \times r}{R}\,^{*}.$$

3. Dessiner en projections un tronc de pyramide régulière à bases parallèles et hexagonales, dont la grande base repose sur le plan horizontal. Le côté de la base inférieure aura $2^m,20$, celui de la base supérieure $1^m,60$ et la hauteur sera de $2^m,50$. Calculer la génératrice, l'apothème et la surface convexe. La développer.

Le développement s'exécutera de la manière suivante : on disposera le polygone de base de manière qu'une des arêtes soit parallèle au plan vertical, alors elle s'y projettera en vraie grandeur. On achevera la pyramide dont le tronc est une portion. Cette arête prolongée figurera celle de la pyramide totale. Alors on décrira un arc de cercle indéfini avec cette arête pour rayon, et un autre arc concentrique avec celle de la petite pyramide. On portera sur l'arc de plus grand rayon la suite des côtés de la base inférieure, et on joindra tous les points de division au centre. Puis le développement des côtés de la base supérieure sera déterminé par les points de rencontre de toutes ces arêtes entières avec l'arc de plus petit rayon (fig. 3).

Si on ne pouvait, à cause des limites de la feuille de dessin, achever la pyramide, on construirait à la suite les uns des autres chacun des trapèzes égaux qui forment la surface du tronc, au moyen des deux bases et des côtés non parallèles ou de l'apothème.

4. Dessiner par projections un tronc de cône circulaire droit à bases parallèles, la grande base reposant sur le plan horizontal. Le rayon de la base inférieure sera de $2^m,20$, celui de la base supérieure $1^m,60$ et la hauteur du tronc $2^m,50$. Calculer la génératrice et la surface. La développer.

Pour le développement, on achevera le cône dont le tronc

---

* Application à la construction des surfaces coniques.

est une portion, et on décrira deux arcs de cercles indéfinis et concentriques avec les génératrices du grand et du petit cône pour rayons. Sur l'arc de plus grand rayon on prendra une longueur égale au développement du cercle de base inférieure par l'un des deux procédés donnés plus haut. On joindra les deux extrémités de cet arc au centre commun, et l'arc de plus petit rayon compris entre les deux grands sera le développement du cercle de base supérieure (fig. 4).

Si les limites de la feuille de dessin ne permettent pas d'achever le cône, on le décomposera en petits trapèzes inscrits dont on construira le développement *.

5. Si on mène, à partir du sommet d'une pyramide quelconque, un plan parallèle à la base aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur, quelle sera la surface de la section par rapport à la base?

6. A quelle distance du sommet, par rapport à la hauteur, faut-il mener un plan parallèle à la base pour que la surface de la section soit les $\frac{3}{4}$ de celle de la base?

7. Tracer les projections de deux pyramides régulières semblables à bases triangulaires. La hauteur de la seconde étant les $\frac{3}{4}$ de celle de la première. Enumération des caractères de similitude. Les dièdres se désigneront par leurs arêtes. Que vaut la surface de la seconde par rapport à celle de la première?

8. On veut construire une pyramide semblable à une autre avec la condition que sa surface soit les $\frac{9}{25}$ de celle de la pyramide donnée. Que vaudra chacune des arêtes par rapport à l'arête homologue de celle-ci?

9. Dessiner les projections de deux troncs de pyramides quelconques symétriques par rapport à un plan perpendiculaire à la ligne de terre. Les bases inférieures sont sur le plan horizontal (fig. 5).

10. Dessiner par projections un prisme droit à base hexagonale régulière. On se donnera le côté de cette base égal

* Application à la construction des réflecteurs, etc.

à $2^m,10$, la hauteur égale à $2^m,50$. Calculer sa surface convexe. La développer. La base est sur le plan horizontal (fig. 6).

11. Dessiner par projections un parallélipipède oblique (fig. 7).

12. Dessiner par projections un parallélipipède droit (fig. 8).

13. Dessiner par projections un parallélipipède rectangle (fig. 9).

14. Dessiner par projections un cube (fig. 10).

15. Dessiner par projections un cylindre droit circulaire. Le rayon de base a $2^m,10$, la hauteur est de $2^m,50$. Calculer sa surface convexe. La développer (fig. 11).

16. Dessiner par projections un anneau circulaire dont la génératrice est un carré. Mesurer sa surface (fig. 12).

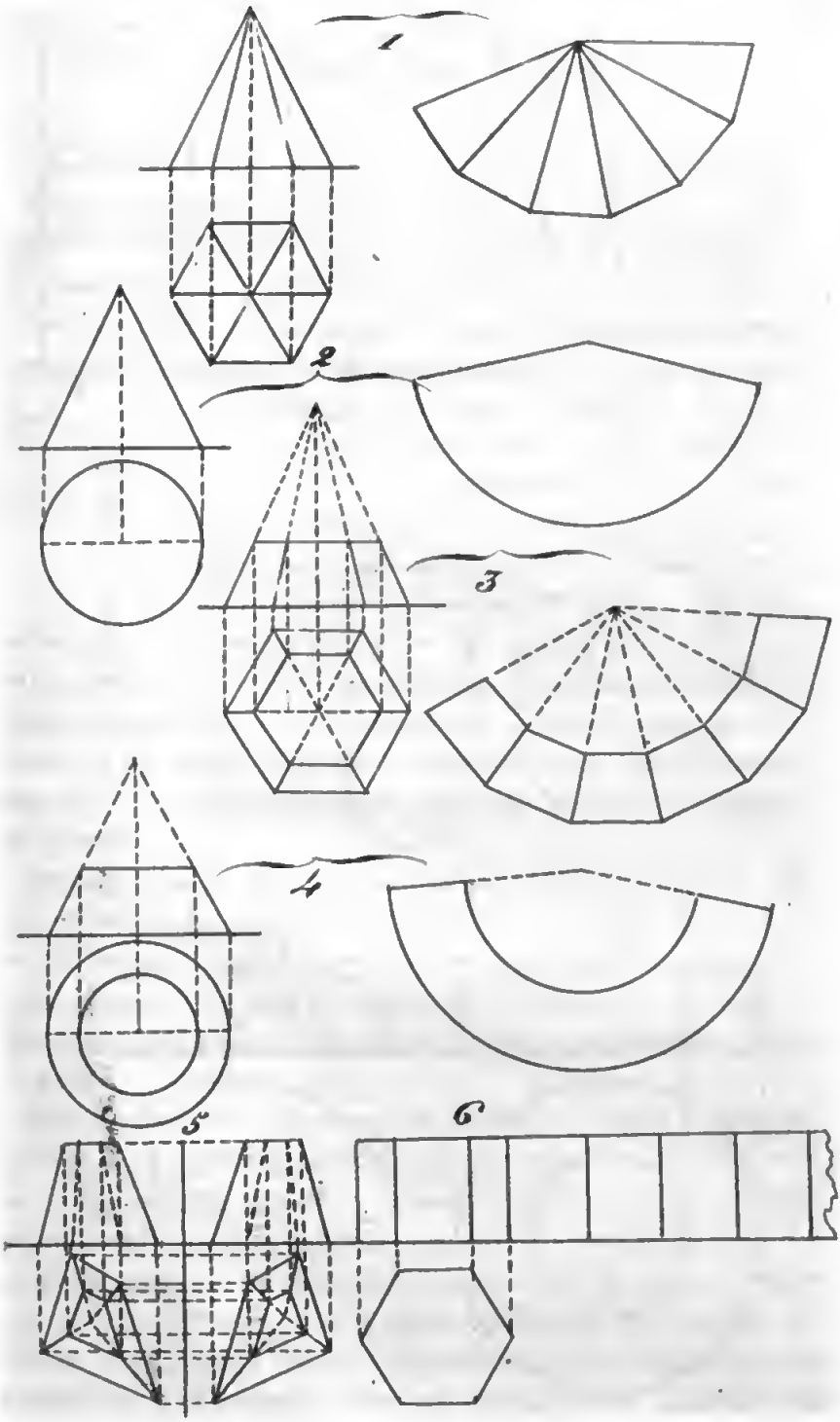
17. Id. dont la génératrice est un cercle. Mesurer sa surface (fig. 13).

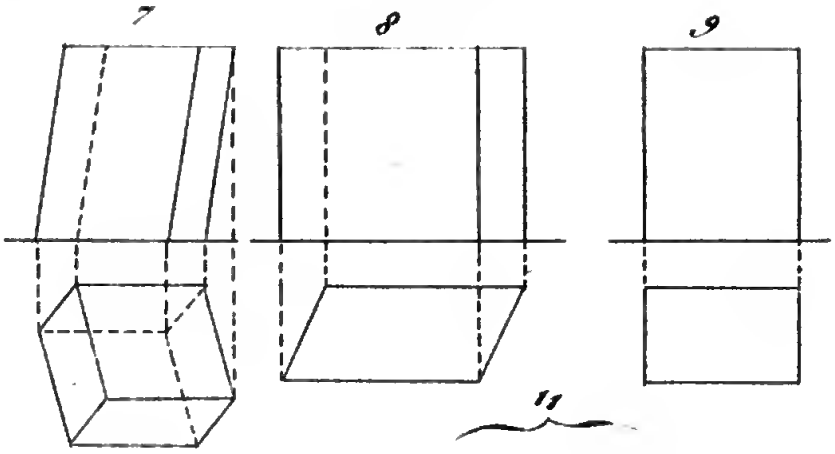
Nota. On considérera, pour le mesurage, la première surface comme un prisme ayant pour base la génératrice et pour hauteur la circonf.ce moyenne, la seconde surface comme un cylindre formé des éléments analogues.

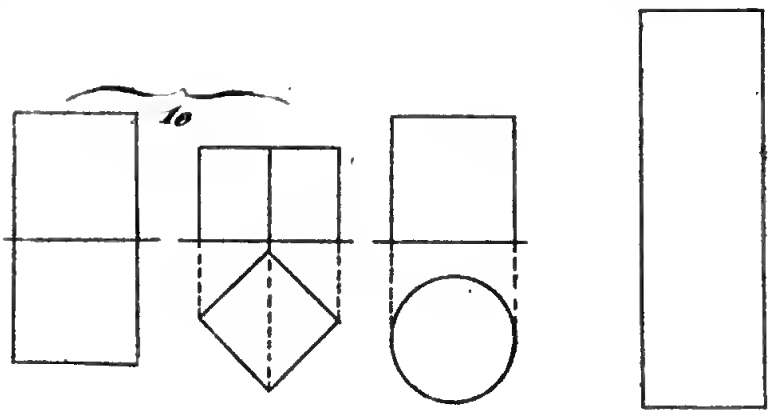
18. Dessiner les projections d'une sphère d'un rayon de $2^m,10$; celles d'une zône prise sur cette sphère, dont les cercles de bases soient parallèles au plan horizontal et dont la hauteur soit de $1^m,10$. Mesurer la surface de cette sphère et celle de la zône.

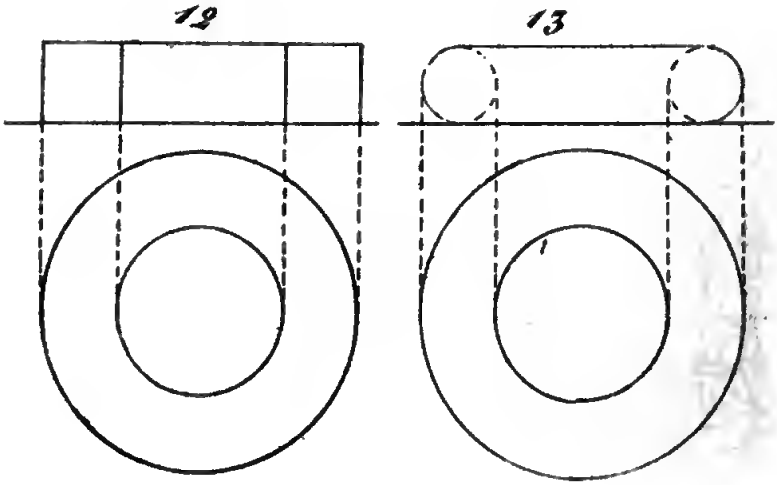
19. Dessiner sur une sphère égale à la précédente un fuseau dont les plans soient verticaux et dont l'angle dièdre soit de 45° 20′. Mesurer sa surface (voyez pour ce tracé l'application 2).

20. Dessiner les développements des surfaces des cinq polyèdres réguliers ayant chacun pour arête $1^m,80$.


1
2
3
4
5
6


7
8
9

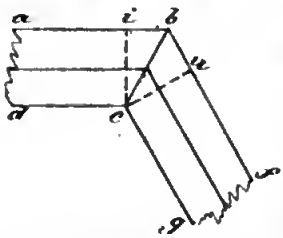

11
10


12
13

APPLICATIONS.

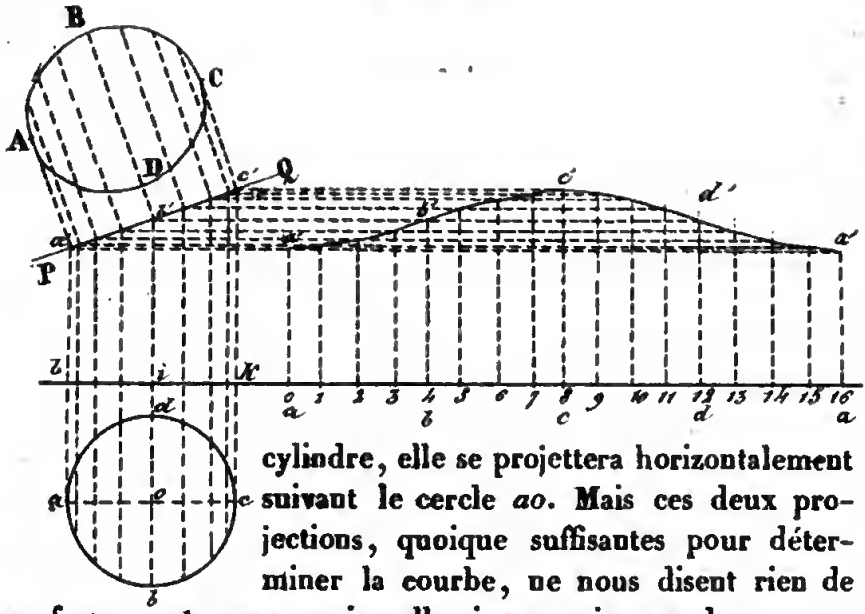
Application 1. — Section d'un cylindre par un plan.

Lorsqu'un tuyau circulaire en forme de cylindre, tel qu'un tuyau de poêle, doit changer de direction, on le coupe par un plan incliné sur l'axe, et on raccorde avec celui-ci et suivant ce même plan un autre tuyau cylindrique de même rayon. Mais il faut pour que ce dernier soit circulaire et de même rayon, que l'angle des deux axes soit divisé en deux parties égales par le plan de séparation, ou, en d'autres termes, que la trace *bc* de ce plan sur celui qui passe par les deux axes soit bissectrice de l'angle de ces deux axes ou des génératrices parallèles *ab*, *bf*. En effet, ce n'est qu'à cette condition que les deux triangles *icb* et *bcu* seront égaux comme rectangles en *i* et en *u*, ayant l'hypothénuse *bc* commune et un angle aigu égal, savoir : *ibc* et *cbu*; donc *ic*, diamètre du second cylindre, est alors égal à *cu*, diamètre du premier.



Proposons-nous de trouver sur le développement de l'un des cylindres la courbe résultant de la trace du plan. C'est le problème qu'ont à résoudre les ferblantiers et serruriers pour couper d'avance la feuille de ferblanc ou de tôle de telle sorte que celle-ci façonnée en cylindre présente la section du plan.

Soit *oa* le cercle de base du cylindre supposé vertical, *ha'b'c'k* la projection verticale de ce cylindre, PQ la trace du plan coupant supposé *perpendiculaire au plan vertical de projection*. (Quel que soit en effet le plan de la section, on peut toujours tourner le cylindre et ce plan de manière que ce dernier satisfasse à cette condition.) La courbe de section étant située dans ce plan se projettera verticalement suivant *a'c'*, et comme elle est aussi sur le contour du



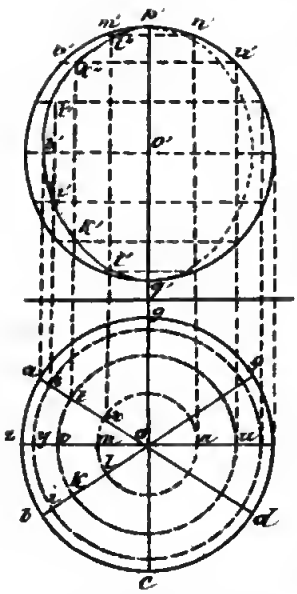
cylindre, elle se projettera horizontalement suivant le cercle *ao*. Mais ces deux projections, quoique suffisantes pour déterminer la courbe, ne nous disent rien de sa forme, et pour avoir celle-ci en vraie grandeur, nous rabattons le plan de section sur le plan vertical de projection. Les lignes projetantes des points a', b', c' et des points intermédiaires se rabattront suivant les perpendiculaires a'A, b'B c'C et leurs intermédiaires. On prendra sur ces perpendiculaires indéfinies des longueurs : a'A égale à *ha*, b'B égale à *ib*, b'D égale à *id*, c'C égale à *ck* et ainsi des autres. Tous ces points détermineront la courbe ABCD appelée *ellipse*.

Pour avoir le développement du cylindre et de la courbe de section, il faut le couper suivant la génératrice $a'h$ par exemple, développer le cercle de base en ligne droite sur la ligne de terre, et marquer sur ce développement les seize petits arcs de la circonférence qui se confondent sensiblement avec leurs cordes, et en chacun des points de division figurer les génératrices avec leurs grandeurs prises en projection verticale. C'est ainsi qu'on a obtenu la courbe $a'b'c'd'a'$.

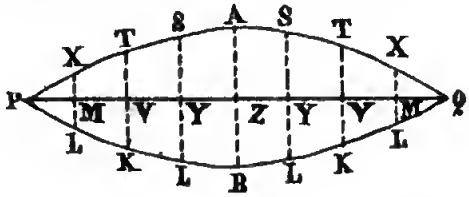
Application 2. — Décomposition de la sphère en fuseaux.

Proposons-nous de couper la sphère par trois plans verticaux de manière à la décomposer en six fuseaux égaux, et cherchons les projections des plans méridiens.

Les traces horizontales de ces plans formeront évidemment



les six rayons *oa*, *ob*, *oc*, *od*, *of*, *og* d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle *ao*. Pour obtenir les projections verticales des courbes méridiennes, divisons la demi-circonférence *p'm'q'* en huit parties égales et menons par les points de division des plans parallèles tels que *m'n'*, *v'u'*, etc., projetons horizontalement les cercles auxquels ces



plans donnent lieu, tels que *mn*, *vu*, etc. Il est d'abord évident que le méridien *goc* se projette verticalement suivant le diamètre *p'q'*. Quant au méridien *bf*, par exemple, observons que les points *b*, *i*, *k*, *l*, o dont se compose la partie antérieure *bo* de sa projection horizontale, sont les projections horizontales de points de ce méridien situés sur les plans parallèles que nous venons de mener, et que nous en aurons les autres projections en les projetant verticalement sur ces parallèles en *b'*; *i'*, *i''*; *k'*, *k''*; *l'*, *l''*; *p'*, *q'*. En joignant tous ces points, nous aurons la projection verticale du demi-méridien correspondant à *bo*. Nous obtiendrons de même le demi-méridien postérieur correspondant à *of*. Enfin, le méridien *ad* a la même projection verticale que le méridien *bf*, parce qu'ils sont tous deux disposés symétriquement par rapport au méridien *zo*.

Nulle partie de la surface sphérique n'est développable. Toutefois quand le fuseau compris entre deux demi-méridiens a pour mesure de son angle dièdre un très-petit arc, les arcs des parallèles compris entre ces deux demi-méridiens se confondent sensiblement avec leurs cordes, et alors on peut le développer approximativement par le procédé suivant :

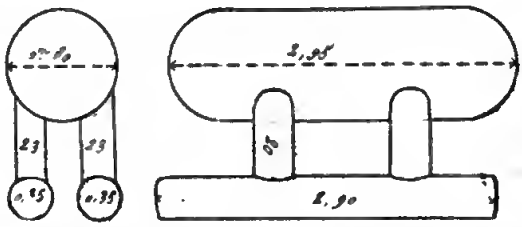
On développe en ligne droite le demi-cercle qui passe par les points milieux z, y, v, m des arcs ab, is, kt, lx des cercles parallèles. Ce développement est égal à celui du demi-cercle $p'v'q'$ qui est figuré en vraie grandeur, et il se fait en portant sur la droite PQ, par exemple, les cordes des arcs $p'm'$, $m'v'$, etc., qui sont sensiblement de mêmes longueurs que ces arcs, puis aux points de division M, V, Y, Z, et à ceux de l'autre moitié ZQ qui correspondent au développement de la partie inférieure du méridien zo, on élève des perpendiculaires MX, ML égales à la moitié de l'arc xl; TV, VK égales à la moitié de l'arc tk, et ainsi de suite. On joint les extrémités de ces perpendiculaires par les courbes PAQ, PBQ qui sont égales.

Ces développements approximatifs sont très-utiles pour la construction des ballons, aérostats, globes géographiques, pour le tracé de la figure de la page 157, pour le débit des demi-fuseaux sphériques dont se composent les hémisphères qui terminent les chaudières à vapeur dites de Watt.

Les formules que nous avons données pour le mesurage de la surface sphérique et de la surface cylindrique sont indispensables pour connaître la quantité de tôle qui entre dans ces chaudières et leurs bouilleurs, et aussi pour calculer la *surface de chauffe* *.

---

* La chaudière de Watt est un cylindre terminé par deux hémisphères. *Les bouilleurs* sont d'autres cylindres de plus petit diamètre que la chaudière, recevant l'action directe du feu et placés au-dessous de la chaudière avec laquelle ils communiquent par des tubes verticaux dits *culottes des bouilleurs*.



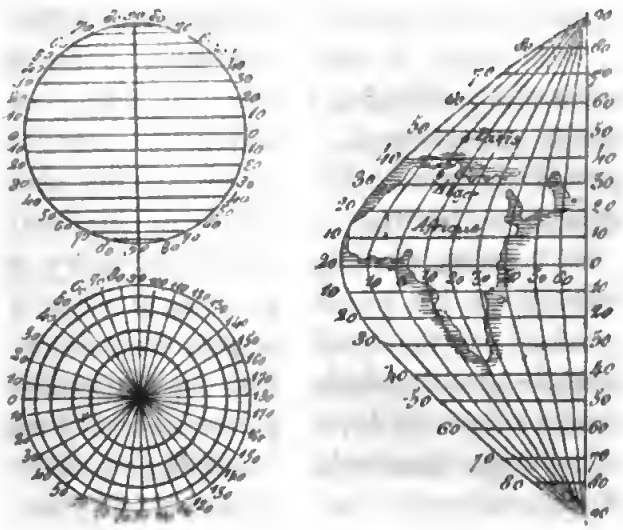
Il est reconnu en physique que la quantité de vapeur qu'une chaudière peut produire dans un temps donné, dépend de la surface exposée au feu, dite *surface de chauffe*. Cette quantité est de 30 kilogrammes par mètre carré et par heure. Les élèves s'exerceront au calcul de la surface totale de la chaudière ci-contre.

C'est aussi au moyen de fuseaux sphériques que se font, dans certains bateaux à vapeur, les tuyaux articulés des cheminées qui doivent s'abaisser lors du passage sous les ponts.

Des divers développements approximatifs de la sphère employés dans la construction des cartes géographiques :

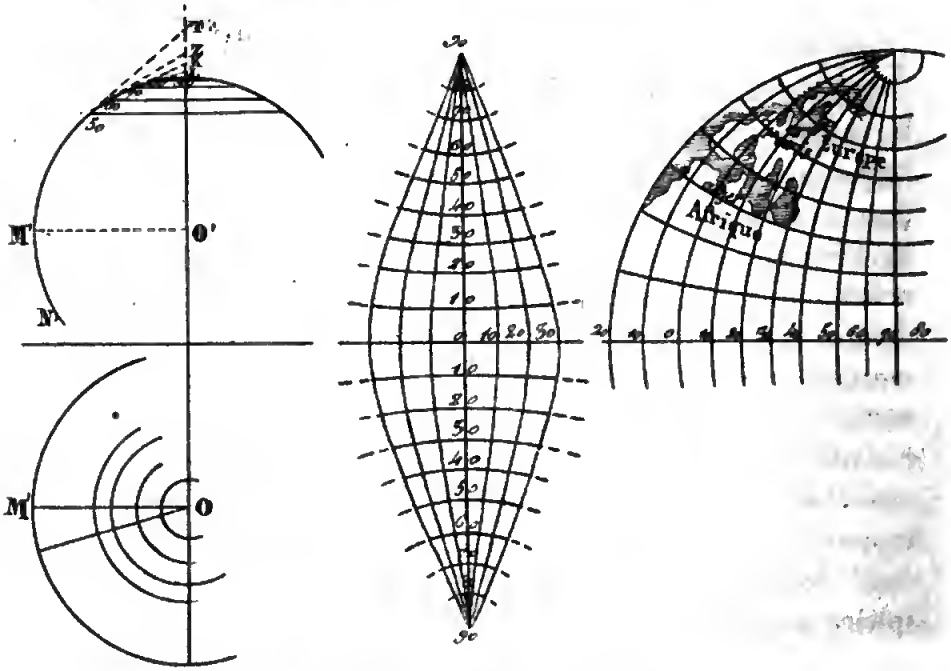
1° *Méthode de Mercator.* — Elle consiste à développer la sphère comme si c'était un cylindre ayant pour base l'équateur. Les tropiques et cercles polaires sont figurés par des parallèles à la droite qui représente le développement de l'équateur. Mais ils sont distants de quantités conventionnelles, telles qu'un chemin fait ou à faire dans une direction donnée est représenté par une droite sur cette carte dite *mappemonde de Mercator,* du nom de l'inventeur. Cette méthode produit *les cartes marines,* autrement dites *cartes réduites,* qui sont d'un usage très-commode pour les marins, mais pour eux seuls, car elles altèrent singulièrement les rapports des grandeurs.

2° *Méthode de Flamsteed.* — Développez chaque hémisphère comme nous avons développé plus haut un fuseau d'une manière approchée, et vous aurez une *mappemonde de Flamsteed*, du nom du géographe qui en a donné le



premier l'idée. On n'a pas tracé les projections verticales des méridiens parce qu'elles sont inutiles ici.

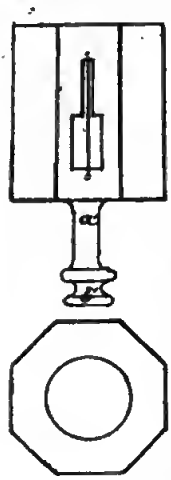
3° *Méthode de Flamsteed modifiée.* — Il existe encore dans la méthode précédente une déformation que le procédé suivant corrige un peu.



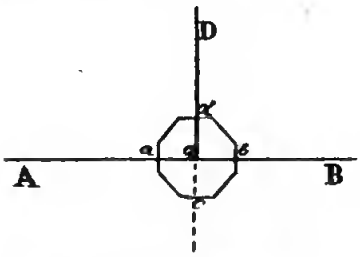
Ayant construit le méridien 90.0.90 comme précédemment, menez aux différents points de division de la méridienne LM'N' les tangentes 80.L, 70.K, etc., de chacun des points obtenus en portant ces tangentes à partir des n°s 80, 70, etc., sur le méridien développé et prolongé, décrivez des arcs de cercle que vous prenez égaux aux développements des arcs de parallèles compris entre les deux méridiens qui limitent le fuseau. Tracez les courbes continues 90.30.90. Il n'y a pas de déformation suivant les parallèles, mais il y en a encore suivant les méridiens. Ce développement est généralement usité aujourd'hui pour la construction des cartes. Les deux figures représentent l'une le développement d'un fuseau de 60° et l'autre celui d'une demi-sphère considérée comme un fuseau de 180°.

DE L'ÉQUERRE D'ARPENTEUR.

Description. — L'équerre d'arpenteur sert à mener sur le terrain une perpendiculaire à une droite. La plus généralement adoptée est en cuivre ; c'est un prisme régulier creux et octogonal. La base supérieure est percée d'un trou circulaire et la base inférieure est munie d'une douille *a'b'* destinée à recevoir un jalon. Ce jalon est armé à sa partie inférieure d'un sabot en fer assez lourd pour qu'en tenant l'instrument par le haut du jalon, celui-ci se place verticalement de lui-même. Quatre faces de ce prisme sont percées de fentes qui déterminent deux plans verticaux se coupant à angles droits suivant l'axe du prisme. Ces plans portent le nom de *plans de mire*. Les fentes très-étroites d'abord, sont plus larges ensuite, et quand la demi-fente étroite occupe la partie supérieure dans l'une des faces, elle occupe la partie inférieure dans la face opposée. Un cheveu adapté verticalement divise en deux parties égales chacune de ces fentes ou fenêtres.



Manière de s'en servir. — Proposons-nous d'élever au point *o* au moyen de cet instrument une perpendiculaire à AB. Nous plaçons en A et B deux jalons verticaux, nous plantons en *o* aussi verticalement celui de l'équerre, et faisons tourner celle-ci sur sa douille jusqu'à ce que mirant le jalon B du point *a*, et le jalon A du point *b*, les deux jalons A et B se trouvent dans le plan de mire *ab*. Le plan de mire *cd* déterminera la perpendiculaire *o*D dont on conserve la direction par un jalon planté en D.

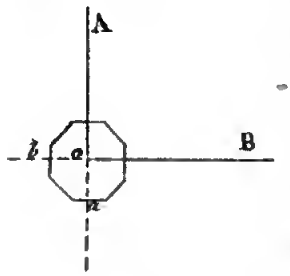


S'il est question d'abaisser une perpendiculaire du point D sur AB, on cherche par tâtonnement de la même manière

que précédemment la position de l'équerre pour laquelle le plan de mire *cd* passe en D. On y arrive assez vite avec un peu d'habitude.

Toutes les fois qu'on mire un point, l'œil de l'opérateur se place contre la partie étroite de la fente appelée l'*oculaire*, et la partie large correspondante de la fente opposée, appelée l'*objectif*, permet de voir, en déviant le rayon visuel du plan de mire, si le jalon est à droite ou à gauche du cheveu de cet objectif. Ce cheveu doit couvrir le jalon pour que celui-ci soit dans le plan de mire.

Sa vérification. — Le rayon de base du prisme ne surpassant guère $0^m,03$, on conçoit que la moindre erreur produite dans la détermination des deux plans de mire de l'équerre en produira une grande dans la détermination de la perpendiculaire, il est donc important de vérifier la justesse de cet instrument avant d'en faire l'acquisition. A cet effet on plante deux jalons A et B dans la direction des deux plans de mire, on tourne l'instrument d'un quart de révolution et on mire de nouveau les mêmes jalons. S'ils se trouvent encore dans les deux nouveaux plans de mire, l'équerre est bonne. Car si l'angle AoB déterminé de la première fois était aigu, l'angle B*oa* ou A*ob* son supplément serait obtus, et si on mire le jalon B après avoir tourné l'instrument d'un quart de révolution, le jalon A se trouvera compris dans l'angle des deux nouveaux plans de mire. L'inverse aura lieu si l'angle AoB est obtus. Il faut encore examiner avant cette vérification si les cheveux des fenêtres sont bien tendus, et dans le cas où ils ne le seraient pas, il faut les retendre. Cela se fait au moyen de deux petites vis qui en fixent les extrémités. L'humidité de l'atmosphère fait varier cette tension d'un moment à l'autre.



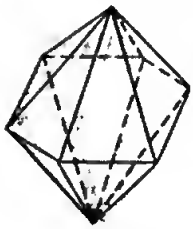
DES POLYÈDRES RÉGULIERS.

Certains polyèdres réguliers sont employés comme dés à jouer, parce qu'il résulte de leur construction qu'ils n'ont pas plus de tendance à tomber sur une face que sur l'autre.

On en rencontre aussi dans la nature. Le tétraèdre régulier est la forme qu'affectent les cristaux de cuivre gris. Le cube se rencontre dans le sel gemme, les pirites de fer. L'octaèdre régulier est une des formes du spath fluor, de certains cristaux de fer qu'on rencontre aux environs de Metz, du diamant.

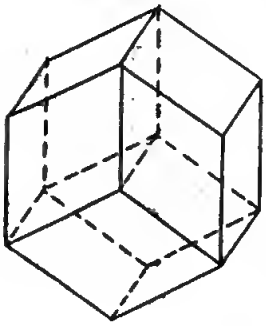
En cristallographie on considère encore plusieurs autres polyèdres qui, sans être *réguliers*, offrent une certaine uniformité d'aspect. Tels sont :

1° Les *octaèdres* formés de deux pyramides régulières à base carrée, juxta-posées par cette base. Les angles au sommet de ces pyramides pouvant être tous aigus ou tous obtus. La première de ces formes est celle de l'*anatase;* la seconde est celle du *zircon*.



2° Le *dodécaèdre triangulaire* formé de deux pyramides régulières hexagonales opposées l'une à l'autre par la base.

Cette forme est celle du *quartz* ou *cristal de roche*.



3° Le *dodécaèdre rhomboïdal* dont les douze faces sont des losanges égales.

Cette forme appartient au *grenat*, au *spath d'Islande*.

4° Le *trapézoèdre* dont les vingt-quatre faces sont des quadrilatères égaux.

Cette forme appartient au *grenat*, à l'*amphigène*, etc.

Les minéraux présentent beaucoup d'autres formes polyèdrales qui dérivent toutes de celles que nous avons signalées. L'étude de ces formes est l'objet spécial de la cristallographie.

FIN DES EXERCICES ET APPLICATIONS DU SIXIÈME LIVRE.

LIVRE SEPTIÈME.

Nota. Comme nous aurons occasion de faire usage des racines cubiques, pour certaines applications de ce livre, nous allons en exposer la théorie en peu de mots.

Le *cube* d'un nombre est le produit de trois facteurs égaux à ce nombre.

Il s'indique par le chiffre 3 placé au-dessus du nombre et un peu à droite, et il s'effectue en multipliant ce nombre deux fois par lui-même.

C'est ainsi que l'on a trouvé :

$1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$, $9^3 = 729$, etc.

Le cube d'un produit est égal au produit des cubes des facteurs.

Ex. $(3 \times 4 \times 5)^3 = 3^3 \times 4^3 \times 5^3 = 27 \times 64 \times 125 = 216\,000$;
$30^3 = 3^3 \times 10^3 = 27 \times 1000 = 27\,000$.

Pour élever au cube une fraction, on fait le cube de chaque terme.

Ex. $\left(\frac{7}{8}\right)^3 = \frac{7^3}{8^3} = \frac{343}{512}$.

On appelle *racine cubique* d'un nombre, un autre nombre qui, multiplié deux fois par lui-même, reproduit le premier.

On l'indique par le signe $\sqrt[3]{}$ sous lequel on écrit le nombre dont on veut extraire la racine.

Ainsi $\sqrt[3]{1}=1$, $\sqrt[3]{8}=2$, $\sqrt[3]{27}=3$, $\sqrt[3]{64}=4$, $\sqrt[3]{125}=5$, $\sqrt[3]{216}=6$, $\sqrt[3]{343}=7$, $\sqrt[3]{512}=8$, $\sqrt[3]{729}=9$.

Les racines cubiques des nombres compris entre 1 et 8 sont comprises entre 1 et 2; celles des nombres compris entre 8 et 27 sont comprises entre 2 et 3, etc.

Si la racine cubique d'un nombre entier n'est pas entière, elle n'est pas non plus fractionnaire et elle est dite *incommensurable*.

EXTRACTION DES RACINES CUBIQUES DES NOMBRES ENTIERS QUI ONT PLUS DE TROIS CHIFFRES.

Ex. $\sqrt[3]{1953125}$.

1.9 5 3. 1 2 5	125
9.5 3	3 | 432
1 7 2 8	
2 2 5 1.2 5	
1 9 5 3 1 2 5	
0	

On partage le nombre en tranches de trois chiffres à partir de la droite. Puis, à partir de la gauche, on extrait la plus grande racine entière de la première tranche, on l'écrit à droite du nombre proposé. Ici $\sqrt[3]{1}$ est 1. On élève cette racine au cube et on soustrait ce cube de cette première tranche; le cube de 1 est 1 et il reste 0. A côté du reste on abaisse la tranche suivante 953, on sépare les deux derniers chiffres 53. On fait trois fois le quarré de la racine 1 et on écrit le résultat 3 au-dessous de cette racine. On divise la partie 9, qui précède la virgule dans le reste 953, par ce triple quarré 3; le quotient 3 donne le second chiffre de la racine ou un chiffre trop fort. Pour l'essayer et pour avoir le nouveau reste, on l'écrit à la droite du premier chiffre de la racine, et on élève au cube le résultat 13 pour le retrancher de l'ensemble des deux premières tranches, à droite du nombre proposé. Ici la soustraction n'est pas possible, parce que le cube de 13 donne 2197 qui est plus grand que 1953. Alors on diminue

ce quotient d'une unité, et on élève au cube le nombre 12 pour retrancher ce cube de 1953. $12^3 = 1728$; et 1953—1728 donne 225. A côté du reste on abaisse la tranche suivante, ce qui donne 225125. On sépare les deux derniers chiffres à droite, 25, et on divise la partie 2251, qui est à gauche de la virgule, par le triple quarré du nombre 12, obtenu jusqu'alors à la racine. 3×12^2 donne 432, et le quotient de 2251 par 432 est de 5, qui constitue le troisième chiffre de la racine ou un chiffre trop fort. Pour le vérifier, on fait le cube de 125, pour le soustraire de l'ensemble des trois premières tranches (ou dans ce cas-ci, de tout le nombre proposé). Le cube donne 1953125, et le reste est 0. La racine est donc 125.

EXTRACTION DES RACINES CUBIQUES DES NOMBRES ENTIERS PAR APPROXIMATION.

Quand on a abaissé toutes les tranches et que le dernier reste n'est pas nul, le nombre proposé n'a pas pour racine un nombre entier, et celui qu'on obtient est dit *racine approchée à moins d'une unité*. On ne peut obtenir la racine exactement, mais on peut en approcher autant qu'on veut. On la cherche alors à 0,1, 0,01 ou 0,001 près; c'est-à-dire qu'on se propose d'avoir, avec la partie entière, les dixièmes, centièmes ou millièmes de la véritable racine. A cet effet on fait suivre le nombre proposé d'autant de fois trois zéros qu'on veut obtenir de décimales à la racine; on opère sur ce nouveau nombre comme s'il était entier, et on sépare à la droite de sa racine le nombre de décimales que comporte la question.

Ex. $\sqrt[3]{3}$ à 0,01.

3000000	1,44	
2000	3	588
2744		
256000		
2985984		
15016		

EXTRACTION DES RACINES CUBIQUES DES NOMBRES DÉCIMAUX.

Si le nombre est décimal et si le nombre des décimales est multiple de 3, on extrait la racine comme s'il était entier, et on sépare à sa droite le tiers du nombre des décimales.

Si le nombre des décimales n'est pas multiple de 3, on le rend multiple en écrivant un ou deux zéros à sa droite. Cela n'en change pas la valeur.

S'il y a plus du triple de décimales au nombre proposé qu'on n'en veut à la racine, on n'en conserve que le triple et on néglige toutes les autres.

S'il y en a moins que le triple, on complète par des zéros.

RACINES CUBIQUES DES FRACTIONS.

Si les deux termes sont des cubes, on extrait les racines cubiques des deux termes.

Ex. $\sqrt[3]{\frac{343}{729}} = \frac{7}{9}$.

La racine cubique d'une fraction est plus grande que cette fraction.

Si les deux termes ne sont pas des cubes, on cherche alors la racine à 0,1, 0,01, 0,001, etc.; pour cela on divise le numérateur par le dénominateur, de manière à obtenir au quotient trois fois plus de décimales qu'on n'en veut à la racine.

Ex. $\sqrt[3]{\frac{5}{6}}$ à $0,01 = \sqrt[3]{0,833333} = 0,94$.

RACINES CUBIQUES DES PRODUITS.

Souvent on extrait à l'inspection la racine cubique de nombres assez forts, en se fondant sur le principe suivant :

La racine cubique d'un produit est égale au produit des racines cubiques des facteurs.

Ex. $\sqrt[3]{27000} = \sqrt[3]{27 \times 1000} = 3 \times 10 = 30$.

Il résulte de ce même principe qu'un facteur hors du radical peut passer au-dessous, après avoir été élevé au cube.

Ex. $4\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{64 \times 2} = \sqrt[3]{128}$.

CALCUL DES FRACTIONS QUI CONTIENNENT DES RADICAUX.

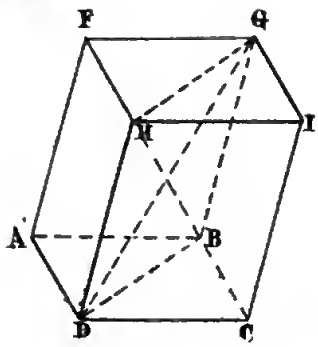
Souvent on rencontre dans les calculs, des fractions dont le dénominateur est engagé sous un radical cubique. Ex. $\frac{13}{\sqrt[3]{2}}$. En laissant à cette fraction sa forme primitive, pour substituer à son dénominateur la racine approchée, il serait moins facile d'apprécier le degré d'approximation de la fraction que si le radical était au numérateur seul. Pour l'y faire passer, on multiplie les deux termes par le quarré de $\sqrt[3]{2}$ ou $\sqrt[3]{2^2}$ et remarquant que $\sqrt[3]{2^3} = 2$, on aura :

$$\frac{13}{\sqrt[3]{2}} = \frac{13\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^2}} = \frac{13\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{13\sqrt[3]{2^2}}{2}.$$

Alors pour calculer l'expression à 0,01, par exemple, on fera rentrer le facteur 13 sous le radical, après l'avoir élevé au cube, on extraira la racine à 0,01, et le quotient par 2 sera exact à un demi-centième et à plus forte raison à 0,01.

THÉORÈME I. — *Dans tout parallélipipède, les faces opposées sont égales et parallèles.*

Les bases ABCD, FGHI sont déjà des parallélogrammes égaux et parallèles d'après la définition. Les deux faces opposées AFGB, DHIC sont aussi des parallélogrammes égaux et parallèles ; car HI et FG sont égaux et parallèles comme

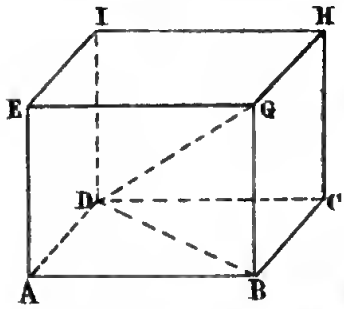


côtés opposés du parallélogramme FGHI. Il en est de même des autres côtés. Les angles AFG, DHI sont égaux comme formés de côtés parallèles et dirigés dans le même sens, et ainsi des autres. Donc les deux faces sont superposables. Démonstration analogue pour les faces ADHF et BCIG.

Scholie. — Il résulte de là que l'une quelconque des faces peut être prise pour base.

THÉORÈME 2. — *Dans tout parallélipipède, les diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales.*

En effet, dans la figure précédente menons les diagonales GD, HB, puis joignons HG, DB; la figure HGBD est un parallélogramme à cause de DH et GB qui sont des arêtes égales et parallèles. Les diagonales GD, HB du parallélipipède sont aussi celles du parallélogramme. Donc elles se coupent mutuellement en deux parties égales.



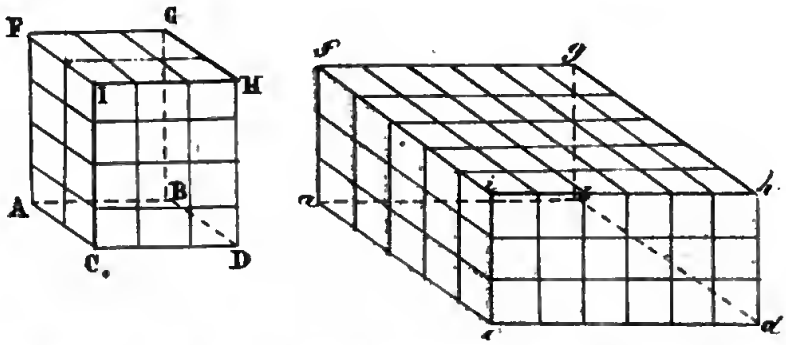
Scholie. — Si le parallélipipède est rectangle, le quarré de la diagonale est égal à la somme des quarrés des trois dimensions de ce parallélipipède. En effet, joignons DB, le triangle DGB, rectangle en B, nous donne :

$$DG^2 = GB^2 + DB^2.$$

Mais à son tour DB est l'hypothénuse du triangle rectangle DAB, donc $DB^2 = AB^2 + AD^2$. Remplaçant DB^2 par cette valeur dans l'égalité précédente, il vient : $DG^2 = GB^2 + AB^2 + AD^2$.

Si le parallélipipède est un cube, alors ses trois dimensions GB, AB, AD sont égales, et on a : $DG^2 = 3.AB^2$, c'est-à-dire que *le quarré de la diagonale du cube est triple du quarré de son arête ;* propriété qui sert à déterminer la diagonale quand on connaît l'arête, ou réciproquement.

Théorème 3. — *Deux parallélipipèdes rectangles ont leurs volumes proportionnels aux produits de leurs trois dimensions.*



Considérons les deux parallélipipèdes figures. Cherchons la plus grande commune mesure entre les trois dimensions AC, CD, CI de l'un, et les trois dimensions *ac, cd, ci* de l'autre. Suppposons-la contenue deux fois dans AC, trois fois dans CD et quatre fois dans CI; cinq fois dans *ac*, six fois dans *cd* et trois fois dans *ci*. Par les points de division de la base ACDB, imaginons des parallèles aux côtés adjacents. Puis par chacune de ces parallèles, imaginons des plans perpendiculaires à cette base. Enfin, par les points de division de la hauteur CI, concevons des plans parallèles à la même base. Même supposition dans le parallélipipède qui a pour base *acdb*. La première tranche du solide comprise entre la base ABCD et le premier plan parallèle, contiendra autant de petits cubes ayant pour arête l'une des divisions, qu'il y a d'unités dans le produit des deux dimensions de cette base ou 2×3. Il y aura autant de tranches égales que de divisions dans la hauteur IC. Donc le solide comprendra $2 \times 3 \times 4$ cubes. Par la même considération, l'autre solide en comprendra $5 \times 6 \times 3$, égaux entre eux et égaux aux premiers. On aura donc la proportion :

$$V : V' :: 2 \times 3 \times 4 : 5 \times 6 \times 3$$

(V et V' désignant les volumes ou solidités des parallélipipèdes), ou plus généralement :

$$V : V' :: AC \times CD \times CI : ac \times cd \times ci.$$

S'il n'y avait pas de commune mesure entre les six droites, on porterait sur chacune d'elles une unité de longueur assez petite pour que le reste puisse être négligé, et en opérant comme précédemment, on arriverait à la même conclusion.

Corollaire 1. — *Deux parallélipipèdes qui ont une dimension commune, sont entre eux comme les produits des deux autres.*

En effet, appelons V le volume de l'un d'eux, A, B, C ses trois dimensions ; V' le volume de l'autre, A, *b*, *c* ses trois dimensions. Nous aurons, d'après le théorème précédent :

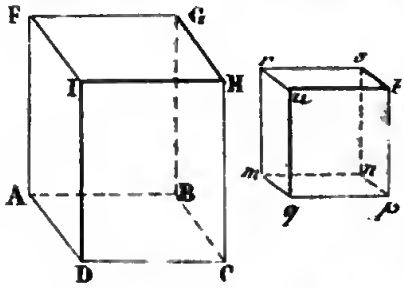
$$V : V' :: A \times B \times C : A \times b \times c.$$

On peut supprimer le facteur A dans les deux termes du rapport, et il vient :

$$V : V' :: B \times C : b \times c.$$

Corollaire 2. — On démontrerait de même que *quand ils ont deux dimensions communes, ils sont entre eux comme les deux autres.*

THÉORÈME 4. — *Un parallélipipède rectangle a pour mesure de son volume le produit de ses trois dimensions.*



Mesurer un volume, c'est chercher son rapport avec un volume arbitraire pris pour unité. On est convenu d'adopter le cube qui a pour arête l'unité de longueur. Soit *mt* ce cube*, AH le parallélipipède que nous voulons mesurer. Nous aurons, d'après le théorème précédent :

$$AH : mt :: AD \times DC \times DI : mq \times qp \times qu.$$

Mais le cube *mt* est pris pour unité, et nous le représentons par 1^{m^3} ; chacune des dimensions *mq*, *qp* et *qu* est égale

* Nous nommons un parallélipipède par une de ses diagonales.

à 1^m. La proportion deviendra donc :

$$AH : 1^{m^3} :: AD \times DC \times DI : 1 \times 1 \times 1,$$

d'où

$$AH = \frac{AD \times DC \times DI}{1 \times 1 \times 1} \times 1^{m^3} = AD \times DC \times DI^{m^3}.$$

Il importe de remarquer que ce produit exprime des mètres cubes, quand l'unité linéaire adoptée est le mètre. Car le rapport $\frac{AD \times DC \times DI}{1 \times 1 \times 1}$ est abstrait, et son produit par 1^{m^3} donne des unités de la nature du multiplicande 1^{m^3}. Si le pied servait d'unité linéaire, le produit représenterait des pieds cubes.

Corollaire 1.—Si nous remarquons que le produit $AD \times DC$ représente la surface du rectangle ABDC, l'énoncé pourra se dire ainsi : *Un parallélipipède rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Corollaire 2. — *Le volume d'un cube est égal au cube numérique de son côté.* Car le cube a ses dimensions égales et leur produit est un cube arithmétique.

Application. — Un parallélipipède rectangle a pour dimensions : $3^m,50$, $4^m,20$, $2^m,15$. Quel est son volume ?

Le produit donne : 31,605, que nous énoncerons : 31 mètres cubes 605 millièmes de mètre cube. Pour certaines applications du mesurage des volumes ou des capacités, il faut quelquefois convertir un tel volume en décimètres, centimètres ou millimètres cubes. A cet effet suivons la formation du tableau suivant :

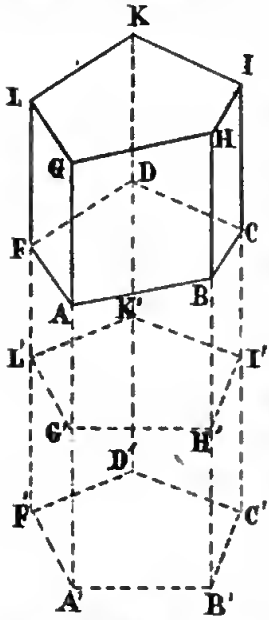
1 mètre en longueur vaut 10 décimètres ;
donc 1 mètre cube vaut..... 10^3 ou 1000 décimètres cubes.
1 mètre en longueur vaut 100 centimètres ;
donc 1 mètre cube vaut..... 100^3 ou 1000000 centim. cubes.
1 mètre en longueur vaut 1000 millimètres ;
donc 1 mètre cube vaut..... 1000^3 ou 1000000000 mill. cubes.

Réciproquement :

1 décimètre cube vaut $0^{m^3},001$.
1 centimètre cube vaut $0^{m^3},000001$.
1 millimètre cube vaut $0^{m^3},000000001$.

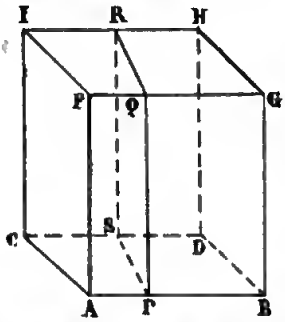
Par conséquent, autant le nombre proposé contiendra de millièmes, autant il contiendra de décimètres cubes. Autant il aura de millionièmes, autant il aura de centimètres cubes. Enfin autant il aura de billionièmes, autant il aura de millimètres cubes. Concluons de là qu'il faut convertir en millièmes un nombre de mètres cubes pour avoir des décimètres cubes ; en millionièmes pour des centimètres cubes ; en billionièmes pour des millimètres cubes.

Théorème 5. — *Un prisme oblique est équivalent à un prisme droit qui aurait pour base la section droite et pour hauteur une des arêtes.*

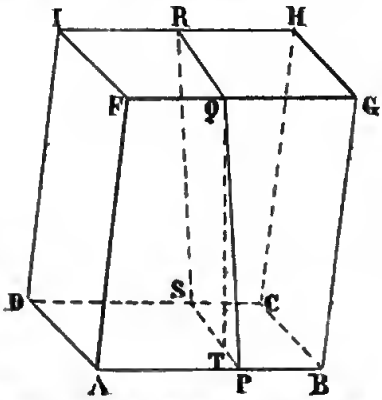


Soit ABCDFGHIKL le prisme proposé. Prolongeons toutes les arêtes dans le même sens, et menons par un point quelconque L' du prolongement de l'une d'elles la section droite L'G'H'I'K'. Prenons sur la même arête FL, dans le même sens, FF' égale à LL', et par le point F' faisons encore une section droite F'A'B'C'D'. Les deux sections sont des polygones égaux et le prisme compris entre elles est le second prisme de l'énoncé. Puisqu'on a pris FF' = LL', en retranchant de part et d'autre FL', on aura : LF = L'F'. Donc toutes les arêtes du prisme compris entre les sections droites sont égales à celles du prisme proposé. Actuellement on peut superposer les deux prismes tronqués A'B'C'D'F'ABCDF et G'H'I'K'L'GHIKL. Car les bases sont égales et se superposeront, l'arête A'A coïncidera avec G'G ; car elles sont toutes deux perpendiculaires aux bases, et de plus elles sont égales puisque A'G' = AG, et qu'en ajoutant de part et d'autre G'A, on a : A'A = G'G. Il en est de même des autres arêtes. Or, si de la figure totale on les retranche successivement, il reste des solides équivalents qui ne sont autres que le prisme oblique et le prisme droit.

Théorème 6. — *Tout parallélipipède a pour mesure de son volume le produit de sa base par sa hauteur.*



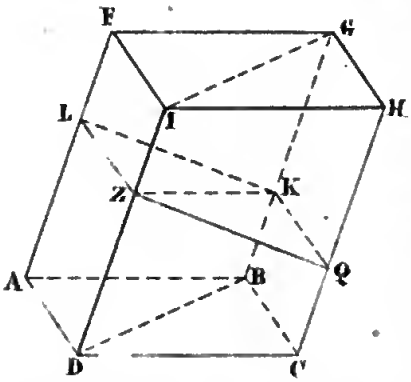
1° Considérons d'abord le parallélipipède droit AH, ayant pour base le parallélogramme ABDC. Faisons une section droite perpendiculaire à l'arête AB, elle donnera lieu au rectangle PQRS. Or, d'après le théorème précédent, le parallélipipède proposé est équivalent à celui qui aurait pour base la section droite et pour hauteur l'arête AB. Ce dernier a pour mesure AB $\times$ SP $\times$ PQ. Mais AB $\times$ SP est la mesure du parallélogramme de base et PQ la hauteur du parallélipipède proposé. Il a donc pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.



2° Considérons un parallélipipède oblique AH ayant pour base le parallélogramme ABCD. Menons sa section droite. Soit PQRS le parallélogramme auquel elle donne lieu. Le parallélipipède proposé est équivalent à celui qui aurait pour base PQRS et pour hauteur l'arête AB perpendiculairement à laquelle on a mené la section. Or la mesure de ce dernier est égale à AB $\times$ surf. PQRS; mais surf. PQRS $=$ SP $\times$ QT. Donc le volume en question ou celui du parallélipipède proposé $=$ AB $\times$ SP $\times$ QT. Mais AB $\times$ SP est la mesure de la base ABCD et QT est la hauteur du parallélipipède.

Théorème 7. — *Le plan mené par deux arêtes opposées d'un parallélipipède le divise en deux prismes triangulaires équivalents.*

1° Observons d'abord que si le parallélipipède était droit, les deux prismes triangulaires partiels seraient égaux, parce que

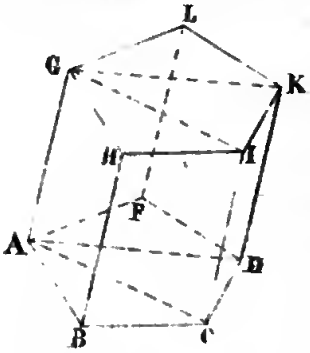


leurs bases seraient égales, comme moitiés du parallélogramme de base, elles seraient par conséquent superposables ; les arêtes s'appliqueraient les unes sur les autres comme perpendiculaires au plan de base, et seraient limitées aux mêmes extrémités puisqu'elles sont égales.

2° Si le parallélipipède est oblique, les deux prismes partiels ne sont plus superposables. Mais ils sont équivalents respectivement aux prismes triangulaires égaux qui auraient pour bases chacune des moitiés du parallélogramme LZQK de la section droite, et pour hauteur l'une des arêtes DI. Ils sont donc équivalents entre eux.

Théorème 8. — *Tout prisme a pour mesure de son volume le produit de sa base par sa hauteur.*

1° Si le prisme est triangulaire, il peut toujours être considéré, d'après le théorème précédent, comme la moitié d'un parallélipipède de base double et de même hauteur. Ce dernier a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur, le prisme triangulaire aura donc pour mesure la moitié du produit de la base du parallélipipède par sa hauteur, ou celui de sa base (qui est la moitié de celle du parallélipipède) par sa hauteur.



2° Si le prisme est polygonal, on observera qu'en le supposant décomposé en prismes triangulaires, au moyen des plans conduits suivant les diagonales homologues AD, GK ; AC, GI ; chacun de ceux-ci aura pour mesure le produit de sa base par la hauteur commune, et la somme de ces produits partiels donnera, pour la solidité du prisme total, le produit de la hauteur par la somme des bases partielles ou par la base totale.

Corollaire 1. — Deux prismes de bases équivalentes sont entre eux comme leurs hauteurs et réciproquement.

Corollaire 2. — Tout prisme a aussi pour mesure le produit de sa section droite par son arête.

Cela résulte du théorème 5 et de la mesure précédente du prisme.

Théorème 9. — *Tout cylindre a aussi pour mesure de son volume le produit de sa base par sa hauteur.*

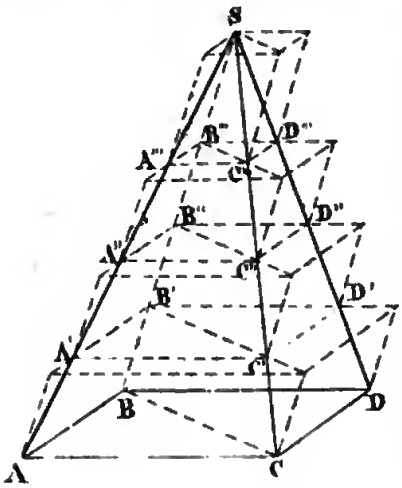
Car le cylindre peut être considéré comme un prisme à base polygonale dont les côtés sont infiniment petits, et alors le théorème précédent lui est applicable.

S'il est circulaire droit, son volume sera donc : $\pi R^2 \times H$ (R désignant le rayon de base et H la génératrice ou la hauteur).

Corollaire 1. — Deux cylindres de même base sont entre eux comme leurs hauteurs et réciproquement.

Corollaire 2. — Tout cylindre a aussi pour mesure le produit de sa section droite par sa génératrice.

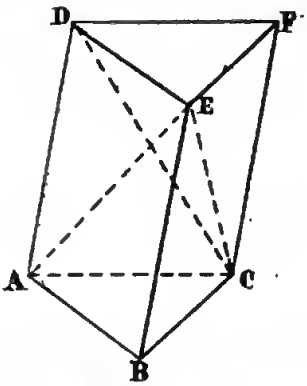
Théorème 10. — *Les deux pyramides triangulaires en lesquelles se décompose une pyramide qui a pour base un parallélogramme, sont équivalentes en volume.*



Soient SABCD la pyramide proposée et SABC, SBCD les deux pyramides triangulaires en lesquelles elle est décomposée par le plan SBC. Divisons la hauteur en un certain nombre de parties égales, et menons un plan parallèle à la base par chacun des points de division. Chaque section sera un parallélogramme, puisque les sections d'une pyramide par des plans parallèles à la base sont

des polygones semblables à celui de cette base. Construisons sur chacun d'eux des prismes quadrangulaires qui aient pour hauteur la distance de deux sections consécutives. Le plan SBC qui décompose la base ABCD en deux triangles égaux, divise de même chacun des parallélogrammes A'B'C'D', etc., en deux parties égales, et par suite les prismes quadrangulaires en prismes triangulaires égaux. Donc les deux sommes de prismes triangulaires correspondant à chacune des pyramides triangulaires sont équivalentes. Mais si le nombre des sections était plus grand, ces sommes différeraient moins des pyramides triangulaires correspondantes qu'elles excèdent sans cesser d'être égales; et à la limite, c'est-à-dire quand on imagine un nombre infini de sections, les deux pyramides sont égales chacune à la somme des prismes correspondants. Donc elles sont équivalentes.

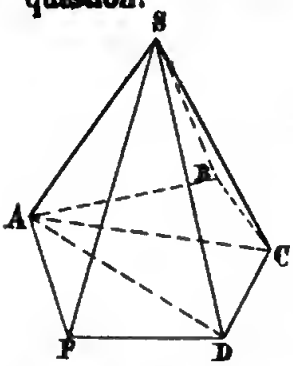
THÉORÈME 11. — *Tout prisme triangulaire peut se décomposer en trois pyramides ayant même base et même hauteur que ce prisme.*



Soit ABCDEF le prisme proposé. Faisons passer un plan par les trois points EAC, et soient EA, EC ses traces sur les faces latérales ABDE et BCEF; il détachera du prisme la pyramide triangulaire EABC qui a pour base ABC et son sommet en E et qui satisfait à l'énoncé. Il reste une pyramide quadrangulaire qui a pour base ADFC et son sommet en E. Faisons passer un plan par les trois points DEC, et soit DC sa trace sur le parallélogramme ADFC; les deux pyramides triangulaires en lesquelles elle est décomposée, sont équivalentes d'après le théorème précédent. Or, l'une d'elles EDFC peut être considérée comme ayant son sommet en C et pour base DEF; elle a par conséquent même base et même hauteur que le prisme; l'autre lui est équivalente; donc la proposition est démontrée.

Théorème 12. — *Toute pyramide a pour mesure de son volume le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

1° La pyramide étant triangulaire, peut être considérée comme l'une des trois dans lesquelles se décompose un prisme de même base et de même hauteur. Or ce dernier a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur ; la pyramide qui en est le tiers aura donc pour mesure le tiers du produit en question.



2° Si la pyramide est polygonale, elle peut être décomposée en pyramides triangulaires, au moyen de plans conduits suivant le sommet et les diagonales AC, AD. Chacune de celles-ci a pour mesure le tiers du produit de sa base par la hauteur commune, et la somme de tous ces produits partiels donnera pour la solidité de la pyramide totale le tiers du produit de la hauteur par la somme des bases partielles ou par la base totale.

Corollaire 1. — *Deux pyramides de bases équivalentes sont entre elles comme leurs hauteurs et réciproquement.*

Théorème 13. — *Le cône a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

Car le cône peut être considéré comme une pyramide polygonale dont la base a un nombre infini de côtés infiniment petits, et comme le théorème précédent est indépendant du nombre des côtés de la base, il sera applicable au cône.

Si la base est circulaire, son volume sera donné par la formule $\frac{\pi R^2 \times H}{3}$; R désignant le rayon de base et H la hauteur du cône.

Théorème 14. — *Tout polyèdre régulier a pour mesure de son volume le tiers du produit de sa surface par le rayon de la sphère inscrite.*

Car si on joint le centre de la sphère inscrite à tous les sommets, on formera autant de pyramides qu'il y a de faces, elles auront chacune pour base l'un des polygones de la surface, et pour hauteur le rayon de la sphère inscrite. Donc leur somme ou le polyèdre aura pour volume le tiers du produit de la hauteur commune ou du rayon par la somme des bases ou par la surface totale.

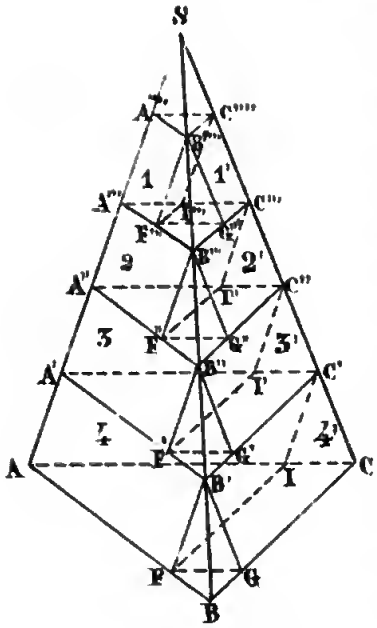
Scholie. — Si le polyèdre n'est pas régulier, on peut encore le décomposer en pyramides, soit en menant des plans par un des sommets et chacune des arêtes non adjacente à ce sommet, soit en menant des plans par un point quelconque pris dans l'intérieur et chacune des arêtes; puis faire la somme de toutes ces pyramides partielles.

Théorème 15. — *Si l'on divise en parties égales l'une des arêtes d'une pyramide triangulaire, et que par le premier point de division, à partir du sommet, on mène un plan parallèle à la base, cette pyramide contiendra autant de petites pyramides égales à celle qui a la section pour base qu'il y a d'unités dans le cube du nombre des divisions.*

Principe d'arithmétique. — La somme des valeurs suivantes qui expriment les différences des cubes consécutifs de 1, 2, 3, 4, 5, etc., donne le cube du nombre des expressions :

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 1 \\ 3\times1^2+3\times1+1=7 \end{array}\right\} 8 \text{ ou } 2^3 \\ 3\times2^2+3\times2+1=19 \end{array}\right\} 27 \text{ ou } 3^3 \\ 3\times3^2+3\times3+1=37 \end{array}\right\} 64 \text{ ou } 4^3 \\ 3\times4^2+3\times4+1=61 \end{array}\right\} 125 \text{ ou } 5^3.$$

Menons par chacun des points de division A'''', A''', A'', etc., des plans parallèles à la base, et sur chacune des sections considérée comme base supérieure, construisons les prismes A''''B''''C''''A'''F'''I''', A'''B'''C'''A''F''I'', etc. Par chacun des points de division B'''', B''', B'', etc., menons des plans parallèles à la face ASC, et soient B''''F''''B'''G''', B'''F'''B''G'',



etc., les pyramides triangulaires qui en résultent, et $C'''I'''C'''B'''F'''G'''$, $C'''I''C''B'''F''G''$, etc., les prismes triangulaires résultant également de cette construction. Ces pyramides triangulaires sont évidemment toutes égales à celle qui a pour base la première section. Les prismes 1, 2, 3, etc., ont tous même hauteur et pour bases supérieures les sections qui valent 1 fois, 2^2 ou 4 fois, 3^2 ou 9 fois, etc., la première $A'''B'''C'''$ (puisque les sections parallèles à la base dans les pyramides, sont entre elles comme les carrés de leurs distances au sommet); et comme le premier vaut trois pyramides équivalentes à la première comme ayant même base et même hauteur que celle-ci, ces prismes vaudront 3×1^2 fois, 3×2^2 fois, 3×3^2 fois, etc., la première pyramide. Les prismes 1', 2', 3', etc., ont pour bases les triangles $C'''I'''C'''$, $C'''I''C''$, etc., égaux à la face $SA'''C'''$ de la première pyramide, et pour arêtes des faces latérales les parallèles $B'''C'''$, $B'''C'''$, etc., qui valent 1 fois, 2 fois, 3 fois, etc., l'arête $B'''C'''$ de cette même pyramide (puisque les parallèles à la base d'un triangle sont proportionnelles à leurs distances au sommet opposé). Donc ces prismes vaudront 1 fois, 2 fois, 3 fois, etc., le prisme 1'. Or, celui-ci est équivalent à la somme de trois pyramides égales à $SA'''B'''C'''$ comme ayant même base et même hauteur, en considérant comme base de la pyramide la face $SA'''C'''$ et comme hauteur la perpendiculaire abaissée du sommet B''' sur cette face. Par conséquent ces mêmes prismes vaudront 3 fois, 2×3 fois, 3×3 fois, etc., la première pyramide. En évaluant chacune des tranches comprises entre deux plans parallèles consécutifs, on trouve que :

La 1re vaut :	1 ..... pyr.		
La 2e —	$3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$ pyr.		
La 3e —	$3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$ pyr.	125 ou 5^3 pyr.	
La 4e —	$3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1$ pyr.		
La 5e —	$3 \times 4^2 + 3 \times 4 + 1$ pyr.		

En tout 5^3 ou autant de pyramides égales à la première que le cube de l'arête contient d'unités.

Théorème 16. — *Les volumes de deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes de leurs arêtes homologues.*

1° Si les deux polyèdres en question sont deux pyramides triangulaires semblables, cherchons la plus grande commune mesure entre deux arêtes homologues, et menons un plan parallèle à la base par le premier point de division, à partir du sommet dans chacune des pyramides. Il détachera de chacune une pyramide triangulaire semblable à la grande, qui sera contenue dans celle-ci un nombre de fois marqué par le cube du nombre des divisions de l'arête. Ainsi, en appelant P et p les solidités ou volumes des deux pyramides, A et a leurs arêtes homologues, et supposant que la commune mesure de ces deux arêtes soit contenue 5 fois dans la grande, 3 fois dans la petite, nous aurons : $P : p :: 5^3 : 3^3$; mais on a : $A : a :: 5 : 3$, par suite $A^3 : a^3 :: 5^3 : 3^3$. Cette proportion et la première ont un rapport commun, donc on en déduit : $P : p :: A^3 : a^3$.

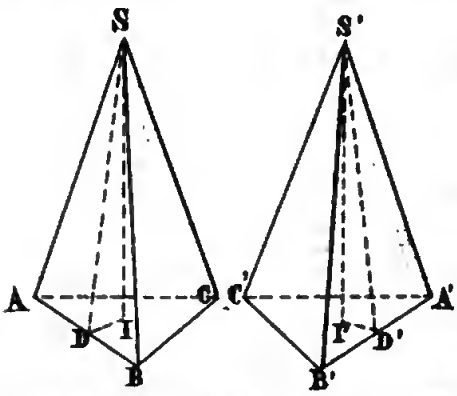
2° Si les deux polyèdres sont plus compliqués que des pyramides triangulaires, ils sont décomposables en pyramides de cette nature qui sont semblables, par conséquent proportionnelles aux cubes de leurs arêtes ou de celles des polyèdres. Ceux-ci qui en sont les sommes le sont donc aussi.

Scholie. — Deux cylindres circulaires droits sont semblables quand les rayons des bases sont proportionnels aux hauteurs. Alors *leurs volumes sont entre eux comme les cubes de leurs rayons ou de leurs hauteurs.* En effet, si

on appelle B la base, R le rayon et H la hauteur du grand; b la base, r le rayon et h la hauteur du petit, nous aurons : $B : b :: R^2 : r^2$, et d'après la définition : $H : h :: R : r$. Multipliant terme à terme ces deux proportions, il vient : $B \times H : b \times h :: R^3 : r^3$; mais $B \times H$ et $b \times h$ sont les volumes des deux cylindres, et le rapport de R^3 à r^3 est le même que celui de H^3 à h^3. Donc la proposition est démontrée.

Même définition et démonstration anologue pour les cônes circulaires droits.

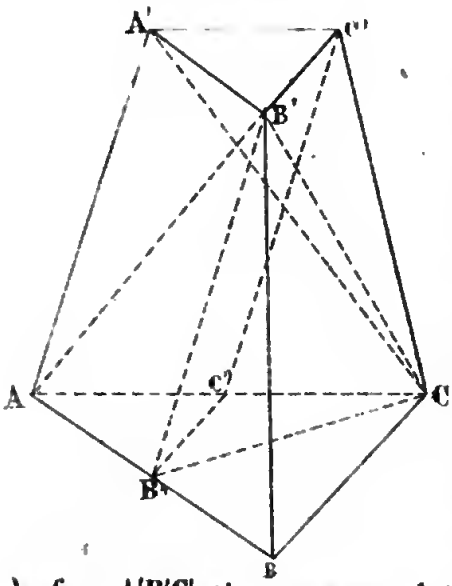
Théorème 17. — *Deux polyèdres symétriques sont équivalents.*



1° Supposons que les deux polyèdres soient des pyramides triangulaires ; d'après la définition, leurs faces sont égales et inversement disposées. Donc déjà les bases ABC, A'B'C' sont égales. Il reste à démontrer que les hauteurs sont aussi égales pour affirmer que les volumes sont égaux. A cet effet construisons ces hauteurs SI, S'I', et des pieds I et I' abaissons des perpendiculaires ID, I'D' sur les arêtes symétriques AB, A'B'; joignons les points d'intersection D et D' aux sommets S et S'; alors SD, S'D' seront perpendiculaires aux arêtes AB, A'B', d'après le théorème 8 du cinquième livre, et de plus les angles SDI, S'D'I' mesureront les dièdres qui ont pour arêtes AB, A'B'. Or, nous avons vu que dans deux pyramides triangulaires symétriques les dièdres formés de deux faces égales sont égaux, donc ces angles sont égaux. D'ailleurs les droites SD, S'D' sont égales comme hauteurs des deux triangles égaux SAB, S'A'B'; par conséquent les triangles SDI, S'D'I', rectangles en I et I', sont égaux comme ayant l'hypothénuse égale et un angle aigu égal. Donc SI = S'I'.

2° Supposons actuellement qu'il s'agisse de polyèdres plus compliqués. D'après la définition, ils seront décomposables en pyramides triangulaires symétriques. Celles-ci seront équivalentes d'après le numéro précédent. Donc les polyèdres qui en sont les sommes sont aussi équivalents.

Théorème 18. — *Un tronc de pyramide triangulaire à bases parallèles est équivalent à la somme de trois pyramides ayant pour hauteur commune celle du tronc et pour bases : l'une, la base inférieure ; l'autre, la base supérieure ; et la troisième, une moyenne proportionnelle entre les deux bases.*



Coupons le tronc par le plan AB'C, nous en détacherons la pyramide B'ABC ayant pour base AB'C, et pour sommet B', par conséquent pour hauteur celle du tronc. Il restera une pyramide quadrangulaire ayant pour sommet B', et pour base la figure AA'C'C. Décomposons-la en deux pyramides triangulaires par le plan B'A'C. L'une d'elles, celle qui a pour sommet B' et pour base A'C'C, peut être considérée comme ayant pour base la face A'B'C' et pour sommet opposé C, c'est la seconde de l'énoncé. La troisième qui a pour sommet B' et pour base A'AC, peut être considérée comme ayant son sommet en B'' sur la parallèle B'B'' à la base A'AC ; alors AB''C devient une de ses faces, adoptons-la pour nouvelle base, et la distance du sommet opposé A' à cette base, n'est autre que la hauteur du tronc. Faisons voir actuellement que le triangle AB''C a une surface moyenne proportionnelle entre celles des triangles ABC, A'B'C'. A cet effet transportons la face A'B'C' sur sa semblable ABC

en AB″C″. Les deux triangles AB″C″, AB″C ont même hauteur par rapport aux bases AC″, AC, donc leurs surfaces sont proportionnelles à ces bases; on aura donc : AB″C″ ou A′B′C′ : AB″C :: AC″ : AC. Les deux triangles ACB″ et ACB ont aussi même hauteur par rapport aux bases AB″, AB ; donc leurs surfaces sont aussi entre elles comme ces bases, et on aura : AB″C : ACB :: AB″ : AB. Les deux derniers rapports de ces deux proportions sont égaux à cause du parallélisme des droites BC, B″C″ ; donc les premiers le sont, et on aura : A′B′C′ : AB″C :: AB″C : ABC, ce qu'il restait à démontrer.

Pour abréger, appelons B et b les deux bases, et H la hauteur, et rappelons-nous que la moyenne proportionnelle entre deux quantités est égale à la racine quarrée de leur produit, alors la solidité du tronc sera donnée par la formule

$$B \times \frac{H}{3} + b \times \frac{H}{3} + \sqrt{B \times b} \times \frac{H}{3}$$

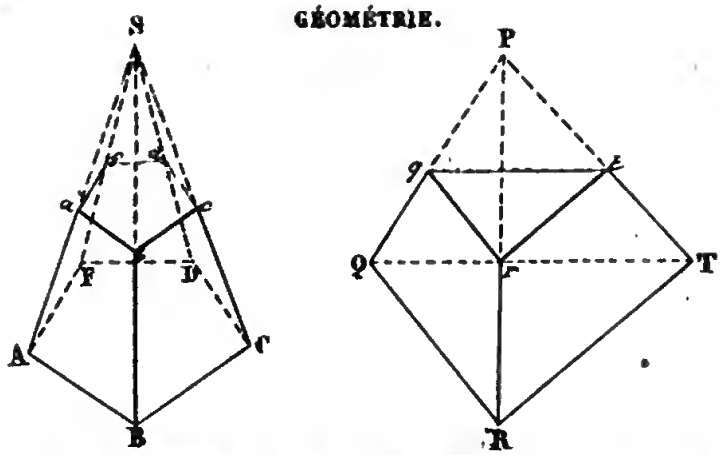
ou plus simplement :

$$\frac{H}{3}(B + b + \sqrt{B \times b}).$$

Scholie. — Pour les applications il est bon d'observer que les polygones de bases sont semblables et ont, par suite, leurs surfaces proportionnelles aux quarrés des côtés homologues. En profitant de cette remarque, la surface de la seconde base se déduira facilement de la première.

Théorème 19. — *Un tronc de pyramide quelconque a pour mesure de son volume la somme des volumes de trois pyramides ayant pour hauteur commune celle du tronc, et pour bases : 1° la base inférieure, 2° la base supérieure, 3° une moyenne proportionnelle entre les deux bases.*

Considérons en effet le tronc de pyramide ABCDF*abcdf*, achevons cette pyramide. Prenons pour base d'une nouvelle pyramide le triangle QRT équivalent au polygone ABCDF, et situé dans le plan de ce dernier, donnons à cette pyramide la même hauteur. Prolongeons le plan de la base supérieure et soit *qrt* le triangle de section de la pyramide triangulaire



par ce plan prolongé, je dis d'abord que le polygone *abcdf* et le triangle *qrt* sont équivalents. En effet, désignons par H la hauteur des deux grandes pyramides et par *h* celle des deux petites, nous aurons d'après le théorème 3, cor. 2 du livre précédent :

$$ABCDF : abcdf :: H^2 : h^2 \quad \text{et} \quad QRT : qrt :: H^2 : h^2.$$

Ces deux proportions ont un rapport commun et les deux autres donnent : ABCDF : *abcdf* :: QRT : *qrt*. Les antécédents sont égaux, donc les conséquents le sont, donc

$$\text{surf. } abcdf = \text{surf. } qrt.$$

Il résulte de là que les deux petites pyramides sont équivalentes comme ayant des bases équivalentes et même hauteur. D'ailleurs les grandes le sont ; par conséquent les deux troncs résultant de la différence des grandes et petites pyramides le sont aussi. Or le tronc de pyramide triangulaire a pour mesure de son volume la somme des pyramides qui ont pour hauteur celle du tronc, et pour bases : 1° le triangle inférieur, 2° le triangle supérieur, 3° la moyenne proportionnelle entre ces deux triangles. Le tronc de pyramide polygonale aura donc la même mesure ; mais comme les triangles QRT, *qrt* sont équivalents aux polygones ABCDF, *abcdf*, on peut les remplacer par ceux-ci, et alors les pyramides partielles seront celles de l'énoncé *.

* On pourrait tenter la démonstration en considérant le tronc de pyramide comme la somme des troncs de pyramides triangulaires, en lesquelles

THÉORÈME 20. — *La solidité d'un tronc de cône à bases parallèles est égale à celle de trois cônes ayant pour hauteur celle du tronc, et pour bases : 1° la base inférieure, 2° la base supérieure, 3° une moyenne proportionnelle entre ces deux bases.*

Car un tronc de cône à bases parallèles peut être considéré comme un tronc de pyramide dont les bases sont des polygones semblables formés de côtés infiniment petits. Par conséquent le théorème précédent lui est appliquable.

---

se décompose le tronc proposé. Alors en désignant par T, T', T'' les surfaces des triangles qui constituent la grande base B, et t, t', t'' celles des triangles de la petite base b; par H' la hauteur de la pyramide totale, h' celle de la petite, on aura à ajouter la suite :

$$\frac{H}{3}\left(T+t+\sqrt{T\times t}\right)+\frac{H}{3}\left(T'+t'+\sqrt{T'\times t'}\right)+\frac{H}{3}\left(T''+t''+\sqrt{T''\times t''}\right),$$

qui donne :

$$\frac{H}{3}\left(T+T'+T''+t+t'+t''+\sqrt{T\times t}+\sqrt{T'\times t'}+\sqrt{T''\times t''}\right)$$

ou

$$\frac{H}{3}\left(B+b+\sqrt{T\times t}+\sqrt{T'\times t'}+\sqrt{T''\times t''}\right).$$

Il faut alors prouver que

$$\sqrt{T\times t}+\sqrt{T'\times t'}+\sqrt{T''\times t''}=\sqrt{B\times b}.$$

A cet effet j'observe qu'on peut poser la suite de proportions :

$$T : t :: B : b, \quad T' : t' :: B : b, \quad T'' : t'' :: B : b.$$

Car les triangles partiels des deux bases sont entre eux comme les carrés des hauteurs H et h, les bases entières sont aussi dans le même rapport. De ces proportions on tire :

$$T=\frac{t\times B}{b}, \quad T'=\frac{t'\times B}{b}, \quad T''=\frac{t''\times B}{b}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression $\sqrt{T\times t}+\sqrt{T'\times t'}+\sqrt{T''\times t''}$, elle devient :

$$\sqrt{\frac{t^2\times B}{b}}+\sqrt{\frac{t'^2\times B}{b}}+\sqrt{\frac{t''^2\times B}{b}}$$

ou

$$t\sqrt{\frac{B}{b}}+t'\sqrt{\frac{B}{b}}+t''\sqrt{\frac{B}{b}}=(t+t'+t'')\sqrt{\frac{B}{b}}=b\sqrt{\frac{B}{b}}=\sqrt{B\times b}.$$

Si les bases sont circulaires, $\pi.R^2$ et $\pi.r^2$ seront leurs surfaces (R et r désignant les rayons). La moyenne proportionnelle sera : $\sqrt{\pi.R^2 \times \pi.r^2} = \sqrt{\pi^2.R^2.r^2} = \pi.R.r$, et alors la formule qui donne la solidité du tronc sera :

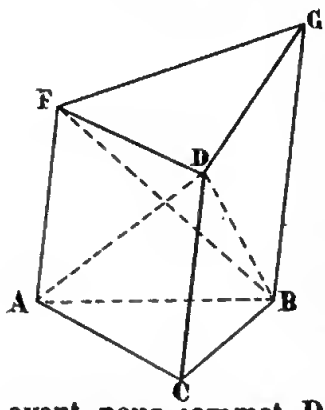
$$\frac{\pi.R^2.H}{3} + \frac{\pi.r^2.H}{3} + \frac{\pi.R.r.H}{3},$$

ou plus simplement :

$$\frac{\pi.H}{3}(R^2 + r^2 + R.r).$$

H désignant la hauteur du tronc.

Théorème 21. — *La solidité d'un tronc de prisme triangulaire est égale à celle de trois pyramides ayant pour base commune celle du tronc, et pour hauteurs les distances des trois sommets opposés à cette base.*

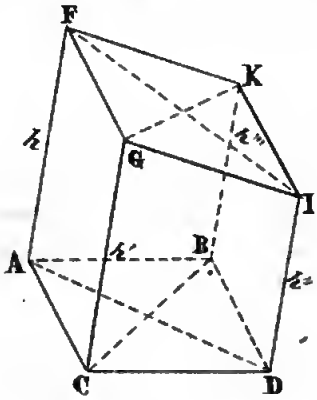


Soit FDGACB le tronc de prisme proposé. Faisons passer un plan par les trois sommets A, D, B. Soient AD, DB ses traces sur les faces latérales ; il détachera du solide une pyramide triangulaire qui a pour base ABC et pour hauteur la distance du sommet D à cette base. Il reste le solide DABFG, qui peut être considéré comme une pyramide quadrangulaire ayant pour sommet D et pour base le trapèze ABFG. Décomposons-la en deux pyramides triangulaires par le plan DFB, dont FB est la trace sur la base. L'une d'elles DFAB est équivalente à celle qui aurait même base ABF et son sommet en C sur la parallèle DC à la base ; mais celle-ci peut être considérée comme ayant pour base la face ACB et pour sommet F. Enfin, la troisième et dernière DFGB est équivalente à celle qui aurait même base FGB et son sommet en C sur la parallèle DC à la base. Considérant dans cette dernière la face GCB comme base, et faisant glisser son sommet opposé F sur l'arête FA parallèle à la base, nous

la transformerons en une autre équivalente qui aura pour sommets les quatre points A, G, B, C. Prenant la face ABC pour base, la hauteur sera égale à la distance du point G à cette base. On obtient ainsi les trois pyramides de l'énoncé.

Si le tronc de prisme est droit, les trois arêtes exprimeront des hauteurs des pyramides partielles.

THÉORÈME 22. — *La solidité d'un parallélipipède tronqué est égale à celle d'un parallélipipède de même base, et dont la hauteur serait le quart de la somme des distances des quatre sommets opposés à cette base.*



Considérons le tronc de parallélipipède ABCDFGIK. Décomposons-le de deux manières en deux troncs de prismes triangulaires par les plans ADFI et CBGK. Désignons par h, h', h'', h''' les distances des points F, G, I, K à la base ABCD, et par B la surface de cette base; puis observons que chacun des triangles ACD, ABD, ACB, CBD qui servent de bases aux prismes triangulaires, sont égales à la moitié du parallélogramme ABCD ou à $\frac{B}{2}$. Nous aurons alors, en désignant les prismes par leurs bases :

$$\text{Prisme ACD} = \frac{B}{2}\left(\frac{h + h' + h''}{3}\right)$$

$$\text{Prisme ABD} = \frac{B}{2}\left(\frac{h + h'' + h'''}{3}\right)$$

$$\text{Prisme ABC} = \frac{B}{2}\left(\frac{h + h' + h'''}{3}\right)$$

$$\text{Prisme CDB} = \frac{B}{2}\left(\frac{h' + h'' + h'''}{3}\right).$$

Ajoutant et observant que la somme des prismes donne deux fois le volume V du parallélipipède, et que $\frac{B}{2}$ est facteur

commun, nous aurons :

$$2V = \frac{B}{2}\left(\frac{h+h'+h''+h+h''+h'''+h+h'+h'''+h'+h''+h'''}{3}\right)$$

ou

$$\frac{B}{2}\left(\frac{3h+3h'+3h''+3h'''}{3}\right),$$

d'où l'on tire :

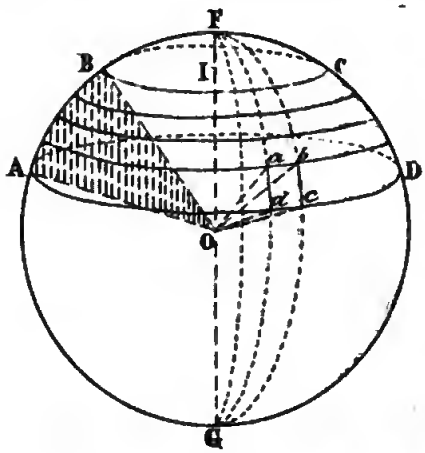
$$2V = \frac{B}{2}(h+h'+h''+h'''),$$

qui donne :

$$V = B\left(\frac{h+h'+h''+h'''}{4}\right).$$

Si le tronc est droit, les quatre arêtes expriment les hauteurs.

Théorème 23. — *Tout secteur circulaire tournant autour d'un diamètre comme axe, engendre un solide qui a pour mesure le tiers du produit de la zône qui lui sert de base par le rayon du cercle ou de la sphère qu'engendre la demi-circonférence dont ce secteur fait partie.*



Soit AOB le secteur qui tourne autour de FG ; l'arc AB engendrera une zône ABCD. Imaginons perpendiculairement à l'axe une suite de plans parallèles fort rapprochés, et par l'axe une suite de plans méridiens aussi très-rapprochés ; la surface de la zône sera ainsi décomposée en petits quadrilatères courbes *abcd*, etc., qu'on peut supposer plans sans erreur sensible. Si l'on joint chacun des sommets au centre, le volume se trouvera décomposé en petites pyramides quadrangulaires dont la hauteur sera égale au rayon de la sphère. La somme des solidités de toutes

ces pyramides donnera donc celle du volume engendré par le secteur. Or, cette somme est égale au tiers du produit de la hauteur des pyramides ou du rayon de la sphère par la somme des bases ou la zône ABCD. On aura donc :

$$V = \text{zône} \times \frac{R}{3}.$$

Si nous remplaçons la surface de la zône par sa valeur $2\pi R \times H$, l'expression deviendra :

$$2\pi R \times H \times \frac{R}{3} \text{ ou } \tfrac{2}{3}\pi R^2 \times H.$$

Cette formule est encore applicable au cas où le secteur aurait un de ses rayons sur l'axe.

Corollaire 1. — Si le secteur est égal à une demi-circonférence, le solide engendré est une sphère, et la zône correspondante est la surface sphérique. Ainsi *la solidité de la sphère est égale au tiers du produit de la surface de la sphère par son rayon.*

La formule qui donne ce volume se déduit de la précédente dans laquelle on remplace H par le diamètre ou 2R, elle devient alors $\frac{4}{3}\pi R^3$. Pour avoir l'expression au moyen du diamètre, remarquons que le diamètre D est égal à 2R, d'où $R = \frac{D}{2}$, et par suite $R^3 = \frac{D^3}{8}$; remplaçant R^3 par cette valeur dans l'expression $\frac{4}{3}\pi R^3$, elle devient :

$$\tfrac{4}{3}\pi \times \frac{D^3}{8} \text{ ou plus simplement } \frac{\pi D^3}{6}.$$

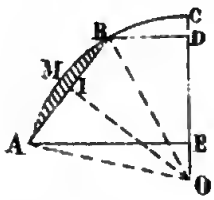
Corollaire 2. — Réciproquement pour avoir le rayon quand on connaît le volume de la sphère, il faut diviser ce volume par les $\frac{2}{3}$ de π et extraire la racine cubique du quotient.

Corollaire 3. — *Le volume compris entre la surface d'un fuseau et les deux méridiens* (ou l'onglet) *est à celui de la sphère comme l'angle du fuseau est à* 360°.

Ainsi on a :

$$\text{Onglet} : \tfrac{4}{3}\pi R^3 :: \text{angle} : 360°, \text{ d'où on tire : Ong.} = \frac{4\pi R^3 \times \text{angle}}{3 \times 360°}.$$

Théorème 24. — *Le volume engendré par un segment circulaire tournant autour d'un diamètre comme axe, est égal à la sixième partie d'un cylindre circulaire droit qui aurait pour rayon de base la corde qui sous-tend l'arc du segment et pour hauteur la projection de cette corde sur l'axe de rotation.*



Soit AMB le segment qui tourne autour de l'axe OC. Projetons la corde AB sur l'axe. Joignons les extrémités A et B au centre et abaissons de ce centre une perpendiculaire sur AB. Le volume cherché sera évidemment égal à la différence entre le volume engendré par le secteur ABO et celui qu'engendre le triangle ABO. Or, le premier est donné par la formule $\frac{2}{3}\pi DE \times R^2$. Le second peut être décomposé en pyramides quadrangulaires par des plans méridiens très-rapprochés et leur hauteur commune serait OI, leurs bases constitueraient en somme la surface du tronc de cône dont AB serait la génératrice ; il a donc pour mesure : surf. $AB \times \frac{OI}{3}$. Or, surf. $AB = 2\pi IO \times DE$ ou $2\pi DE \times IO$. Substituant cette valeur dans l'expression précédente, elle devient : $\frac{2}{3}\pi DE \times IO^2$.

Rapprochons les deux expressions : $\begin{cases} \frac{2}{3}\pi DE \times R^2 \\ \frac{2}{3}\pi DE \times IO^2. \end{cases}$

Retranchant la 1re de la 2e, il vient : $\frac{2}{3}\pi DE(R^2 - IO^2)$.

Mais on reconnaît, à l'inspection du triangle rectangle BIO, que $R^2 - IO^2 = BI^2$. Or, $BI = \frac{AB}{2}$, d'où $BI^2 = \frac{AB^2}{4}$.

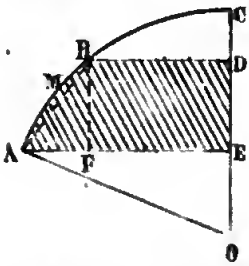
Substituant cette valeur à la place de $R^2 - IO^2$ dans l'expression du volume AMB, il vient :

$$\frac{2}{3}\pi DE \times \frac{AB^2}{4} \text{ ou plus simplement } \frac{1}{6}\pi AB^2 \times DE ;$$

formule conforme à l'énoncé.

Théorème 25. — *Le volume d'un segment sphérique, c'est-à-dire d'une portion de sphère comprise entre deux*

plans parallèles, est égal au volume d'une sphère qui aurait pour diamètre la hauteur du segment, plus au volume d'un cylindre qui aurait pour base la demi-somme des bases du segment et pour hauteur celle de ce dernier.



Supposons qu'il s'agisse du segment dont les rayons de bases sont BD, AE, et dont l'axe est OC. Il est censé engendré par la figure ABDE tournant autour de cet axe. Il est évident qu'il est égal à la somme du volume engendré par le segment circulaire AMB et du tronc de cône engendré par le trapèze ABDE. Or, nous avons trouvé :

$$\text{Vol. AMB} = \tfrac{1}{6}\pi AB^2 \times DE$$

$$\text{Vol. ABDE} = \tfrac{1}{3}\pi DE(AE^2 + BD^2 + AE \times BD).$$

Avant d'ajouter cette dernière expression à la première, mettons-la sous la forme :

$$\tfrac{2}{6}\pi DE(AE^2 + BD^2 + AE \times BD)$$

ou

$$\tfrac{1}{6}\pi DE(2AE^2 + 2BD^2 + 2AE \times BD).$$

Observons aussi que dans la première, $AB^2 = BF^2 + AF^2$ à cause du triangle rectangle ABF ; de plus $BF = DE$ et $AF = AE - FE$ ou $AE - BD$, donc

$$AB^2 = DE^2 + (AE - BD)^2.$$

Rappelons-nous à quoi est égal le carré fait sur la différence de deux lignes $AE - BD$, et il viendra :

$$AB^2 = DE^2 + AE^2 + BD^2 - 2AE \times BD.$$

Substituons à la place de AB^2 cette valeur dans la première égalité, elle deviendra :

$$\text{Vol. AMB} = \tfrac{1}{6}\pi DE(DE^2 + AE^2 + BD^2 - 2AE \times BD),$$

on a trouvé, pour la seconde :

$$\text{Vol. ABDE} = \tfrac{1}{6}\pi DE(2AE^2 + 2BD^2 + 2AE \times BD).$$

Ajoutant, on a :

$$\text{Vol. segment} = \tfrac{1}{6}\pi DE(DE^2 + 3AE^2 + 3BD^2)$$

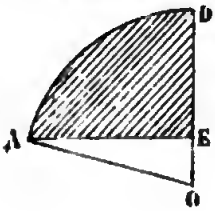
ou

$$\tfrac{1}{6}\pi DE^3 + \tfrac{1}{6}\pi DE(3AE^2 + 3BD^2),$$

ou enfin

$$\tfrac{1}{6}\pi DE^3 + \tfrac{1}{2}\pi(AE^2 + BD^2) \times DE;$$

expression conforme à l'énoncé.



Si l'une des bases est nulle, le segment n'est autre que le volume d'une calotte sphérique, et l'expression devient, en supposant que la base BD soit nulle :

$$\tfrac{1}{6}\pi DE^3 + \tfrac{1}{2}\pi AE^2 \times DE.$$

FIN DU SEPTIÈME LIVRE.

EXERCICES SUR LE SEPTIÈME LIVRE.

1. Dessiner les projections d'un parallélipipède rectangle dont les dimensions sont : 2^m ; $2^m,90$; $3^m,60$. Tracer la diagonale. Grandeur numérique de cette diagonale. Volume du parallélipipède. L'énoncer en mètres cubes, décimètres cubes, centimètres cubes.

2. Dessiner deux parallélipipèdes rectangles ayant pour dimensions communes : $3^m,50$; $2^m,70$, et pour troisièmes dimensions : $2^m,50$; 5^m. Volume du premier. En déduire celui du second par le rapport des troisièmes dimensions.

3. Dessin d'un cube ayant pour côté $3^m,50$. Tracer la diagonale. Valeur numérique de celle-ci. Volume du cube.

4. Un cube a pour diagonale $4^m,20$. Quel est son côté?

5. Un cube a pour volume $5^m,20$. Quel est son côté?

6. Dessiner un parallélipipède droit ayant pour dimensions du parallélogramme de base $3^m,50$; $2^m,20$; pour hauteur $3^m,60$. Quel est son volume?

7. Dessiner un parallélipipède oblique dont la base est une losange formée de deux triangles équilatéraux de $3^m,60$ de côté, et dont la hauteur est de $3^m,40$. Evaluer son volume.

8. Dessiner un prisme hexagonal régulier ; le côté de la base étant $2^m,10$, la hauteur du prisme étant $3^m,90$. Evaluer son volume. Trouver le côté du cube équivalent.

9. Dessiner un anneau circulaire à section carrée ; le grand rayon étant $3^m,20$, le petit $1^m,50$. Evaluer son volume.

Nota. On considérera cet anneau comme un prisme ayant pour base la section, et pour hauteur le développement de la circonférence moyenne.

10. Dessiner un cylindre droit circulaire ; le rayon de base ayant 2^m, la hauteur $2^m,50$. Quel est son volume. Le trans-

former en litres pour avoir sa capacité, dans l'hypothèse où il serait creux et où les dimensions précédentes seraient prises dans œuvre.

11. Dessiner un anneau rond à section circulaire, et dont le rayon moyen soit de $3^m,60$, et le rayon de la section $0^m,90$. Evaluer son volume en ayant égard à la même considération qu'au n° 9.

12. Quel serait le rayon de base d'un cylindre circulaire creux, qui devrait avoir la capacité d'un litre et $0^m,15$ de hauteur?

13. Quelle serait la hauteur d'un cylindre circulaire creux de $0^m,10$ de diamètre, et qui devrait avoir une capacité de deux litres *.

14. Dessiner une pyramide hexagonale régulière de $1^m,60$ de côté, $4^m,20$ de hauteur. Evaluer son volume.

15. Dessin d'un cône circulaire droit ayant pour rayon de base $1^m,90$ et $4^m,20$ de hauteur. Evaluer son volume.

16. A quelle distance, à partir du sommet par rapport à la hauteur, faut-il mener un plan parallèle à la base d'un cône pour que le petit cône qui en résulte ait un volume qui soit les trois quarts du grand.

17. On mène un plan aux $\frac{3}{4}$ de la hauteur d'un cône, à partir du sommet. Que vaut le volume du petit cône qui en résulte par rapport au grand?

Quel est le rayon de base du petit par rapport à celui du grand?

18. Dessiner un tronc de pyramide régulière pentagonale, dont le côté de la base inférieure soit $2^m,10$, celui de la base supérieure $1^m,70$ et la hauteur $3^m,50$. Quel est son volume?

Nota. La surface de la base supérieure se déduira de celle de la base inférieure par la proportionnalité des surfaces de deux polygones semblables, aux quarrés de leurs côtés homologues.

19. Dessin d'un tronc de cône droit circulaire, à bases parallèles. Le rayon de la base inférieure sera de $1^m,80$, celui

* De tous les cylindres à une base de même volume, celui qui a un diamètre égal à la hauteur a la moindre surface.

de la base supérieure $1^m,30$, la hauteur de $3^m,50$. Calculer son volume.

Capacité en hectolitres et en litres d'un bouge ou d'une cuve qui auraient ces dimensions prises dans œuvre.

20. Dessiner un tronc de prisme triangulaire droit. La base sera un triangle équilatéral de $3^m,50$ de côté. Les arêtes latérales seront : $3^m,20$; $4^m,10$; $2^m,50$. Evaluer son volume.

21. Dessiner un tronc de parallélipipède droit ayant pour base un carré de $2^m,60$ de côté, et pour arêtes latérales : $2^m,60$; $3^m,40$; $4^m,20$; $3^m,40$. Mesurer son volume.

22. Dessiner une sphère d'un diamètre de $4^m,20$. Quel sera son volume ?

23. Dessiner sur cette sphère un fuseau de 30° 20′. Volume de l'onglet correspondant.

24. Quel serait l'angle d'un onglet de cette sphère, qui aurait pour volume, $0^{m^3},60$?

25. Dessiner sur une sphère de même rayon une calotte de $0^m,70$ de hauteur. Quel sera le volume compris entre cette calotte et le cercle qui lui sert de base ?

26. Quel est le diamètre d'une sphère qui a pour volume 3^{m^3} ?

27. Dessiner une sphère creuse, le diamètre extérieur étant $4^m,30$, le diamètre intérieur de $3^m,50$. Mesurer le volume de l'enveloppe.

28. Calculer le volume de la chaudière mentionnée dans les applications du livre 6.

APPLICATIONS.

DU MESURAGE DES VOLUMES ET DU JAUGEAGE DES CAPACITÉS.

Mesurer un volume, c'est, comme nous l'avons vu, chercher son rapport à l'unité de volume. Si le corps dont on se

propose d'évaluer le volume est creux, le volume du vide se nomme *la capacité*. Ainsi, mesurer le volume d'un corps creux, c'est en *jauger la capacité*.

Nouvelles mesures. — L'unité de volume adoptée est le mètre cube ; ses subdivisions sont : le *décimètre cube* qui en est la millième partie, le *centimètre cube* qui en est la millionième partie, le *millimètre cube* qui en est la billionième partie.

Pour le mesurage des bois de construction ou des bois de chauffage, l'unité adoptée est aussi le mètre cube ou le *stère*. Dix stères se désignent par l'expression un *décastère*. Un dixième de stère par l'expression un *décistère*.

Pour les capacités, l'unité est le *litre*. C'est un décimètre cube. Les multiples sont : le *décalitre* ou dix litres, l'*hectolitre* ou cent litres, le *kilolitre* ou mille litres ou un mètre cube, le *myrialitre* ou dix mille litres. Ses subdivisions sont : le *décilitre* ou dixième de litre, le *centilitre* ou centième de litre, et le *millilitre* ou millième de litre ou un centimètre cube. Il résulte de ces définitions que pour évaluer en litres une capacité primitivement évaluée en mètres cubes et fractions décimales de ce dernier, il faut écrire à la droite du nombre trois zéros s'il est entier, ou déplacer la virgule de trois rangs à droite s'il est décimal.

Anciennes mesures. — Autrefois l'unité linéaire était la toise, d'où il résultait que l'unité de volume était la *toise cube*. Ses subdivisions étaient le *pied cube*, le *pouce cube*, la *ligne cube*. Comme la toise linéaire vaut 6 pieds, le pied 12 pouces, le pouce 12 lignes, on conclut que la toise cube vaut 6^3 ou 216 pieds cubes ; le pied cube 12^3 ou 1728 pouces cubes ; le pouce cube 1728 lignes cubes.

Pour les bois de construction, l'unité de volume était *la solive*. C'est un prisme à base carrée de 6 pouces ou $\frac{1}{2}$ pied de côté et de 12 pieds de hauteur. Elle vaut par conséquent 3 pieds cubes.

Le bois de chauffage se mesurait à la *corde*. La corde la plus usitée est un prisme qui a pour base un carré de

4 pieds de côté et pour hauteur 8 pieds. Elle vaut par conséquent 128 pieds cubes. On la divise en demi, quart, huitième, seizième, etc.

Les anciennes mesures de capacité variaient suivant les localités.

Conversion des anciennes mesures en nouvelles et réciproquement. — La toise linéaire vaut $1^m,949$, et réciproquement un mètre linéaire vaut $\frac{1^t}{1,949}$ ou $0^t,513$. Par conséquent la toise cube vaut en mètres cubes $\overline{1^m,949}^3$ ou $7^{m^3},40389$. Réciproquement un mètre cube vaut $\overline{0^t,513}^3$ ou $0^{t^3},135064$.

Avec ces rapports, on peut éviter les multiplications de nombres complexes auxquelles donnerait lieu l'évaluation des volumes. Car si les dimensions d'un solide sont données en anciennes mesures, on les convertira en nouvelles; on se servira de celles-ci pour calculer le volume, et on multipliera le résultat par le rapport de l'unité cubique nouvelle à l'ancienne.

La solive qui vaut 3 pieds cubes ou $\frac{3}{216}$ ou $\frac{1}{72}$ de toise cube, vaudra en mètres cubes $\frac{7^{m^3},40389}{72}$ ou $0^{m^3},10281$ ou un décistère fort.

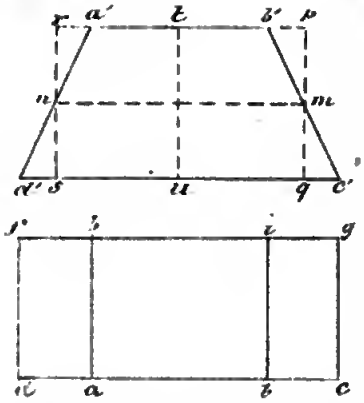
Réciproquement 1^{m^3} vaut $\frac{72^{sol.}}{7,40389}$ ou $9^{sol.},7246$.

La corde qui vaut 128 pieds cubes ou $\frac{128}{216}$ ou $\frac{16}{27}$ de toise cube, vaudra en mètres cubes $\frac{7,40389 \times 16}{27}$ ou $4^{m^3},38749$.

Réciproquement 1^{m^3} vaut en corde $\frac{27}{7,40389 \times 16}$ ou $0^c,227$.

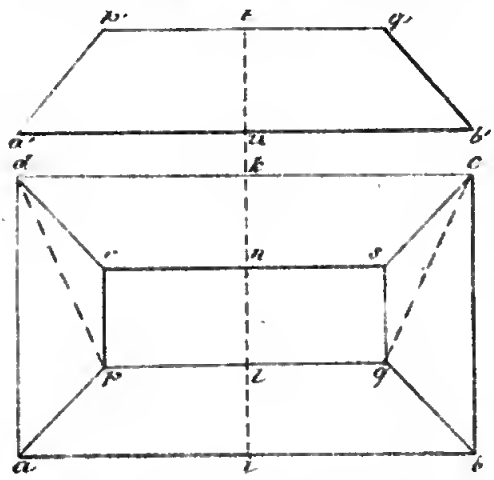
Application 1. — Corder une pile de bois en talus.

Soit $abb'cdd'$ la projection verticale ou l'élévation de cette pile. Prenons le milieu m du talus bc et le milieu n du talus dd', mesurons la distance mn, la largeur gc et la hauteur



pq ou *zu*; faisons le produit de ces trois dimensions évaluées en mètres, le résultat nous donnera le nombre de stères de la pile. En effet, par ce procédé nous substituons au volume donné celui d'un parallélipipède rectangle qui a pour base $mn \times gc$ et pour hauteur *pq*, et il y a compensation, car d'une part nous faisons entrer dans ce parallélipipède le prisme triangulaire qui a pour base *b'mp* et pour hauteur la largeur *gc* de la pile; d'autre part nous négligeons le prisme triangulaire qui a une base égale *mqc'* et même hauteur. A l'autre bout, nous faisons aussi entrer le prisme triangulaire *a'rn* qui a pour hauteur la largeur de la pile, et nous négligeons son égal qui a pour base *nd's*.

Application 2. — Dans les ponts et chaussées on fait usage, pour cuber les pierres destinées à l'entretien des routes, d'une caisse en bois que représente la figure en marge. Elle est formée de quatre pans en forme de trapèzes isocèles également inclinés sur le plan horizontal *abcd*. Deux de ces trapèzes sont égaux et forment les longs pans, les deux autres aussi égaux forment les pans de la croupe. L'ouverture rectangulaire *pqrs* sert à introduire les pierres ou le gravier dans la capacité. Pour mesurer cette capacité, le meilleur moyen est d'imaginer une section droite dont la projection horizontale est figurée par *knli*, et de la considérer comme base commune des deux troncs de prismes quadrangulaires ayant pour arêtes :



l'un, *rn, pl, ia, dk*; l'autre, *sn, kc, ib, lq*. Alors en menant le plan *pdqc*, ces troncs sont divisés chacun en deux troncs de prismes triangulaires. Si nous appliquons à chacun d'eux le théorème de leur mesure, nous trouvons* :

$$V = \frac{h}{6}(2 \text{ surf. } abcd + 2 \text{ surf. } pqrs + pr \times dc + da \times rs)$$

(h désignant la distance tu des deux bases).

Nous concluons que : *pour avoir la capacité de cette caisse, il faut multiplier par le sixième de la hauteur la somme faite avec le double des deux bases et les deux rectangles qui ont pour dimensions : l'un, la longueur de la base inférieure et la largeur de la base supérieure ; l'autre, la longueur de la base supérieure et la largeur de la base inférieure.*

Si on voulait calculer les dimensions d'une caisse semblable

---

* En effet, désignons par $\frac{rp \times h}{2}$ la mesure du triangle qui se projette horizontalement suivant *lnk*, par $\frac{da \times h}{2}$ celle du triangle qui a pour projection horizontale *kli*. Les deux troncs qui ont $\frac{rp \times h}{2}$ pour base commune, auront pour mesure :

$$\frac{rp \times h}{2}\left(\frac{pl + rn + dk}{3}\right) + \frac{rp \times h}{2}\left(\frac{lq + ns + kc}{3}\right)$$

ou

$$\frac{rp \times h}{6}(2rs + dc).$$

Ceux qui ont pour base commune le triangle $\frac{da \times h}{2}$ auront pour mesure :

$$\frac{da \times h}{2}\left(\frac{dk + ai + pl}{3}\right) + \frac{da \times h}{2}\left(\frac{kc + ib + lq}{3}\right)$$

ou

$$\frac{da \times h}{6}(2dc + rs).$$

Ajoutant cette valeur à la précédente, il vient :

$$\frac{h}{6}(2rs \times rp + 2dc \times da + rp \times dc + da \times rs).$$

à une autre, et qui fût d'une capacité donnée, on s'appuierait sur le principe démontré précédemment : les volumes des polyèdres semblables sont proportionnels aux cubes des arêtes homologues. Exemple :

La caisse en usage a pour dimensions de la base inférieure $2^m,50$ et $1^m,50$; pour celles de la base supérieure $1^m,50$ et $0^m,50$; pour hauteur $0^m,50$; on demande sa capacité et les dimensions d'une semblable qui aurait 2^{m^3} de capacité.

La règle précédente nous donne pour capacité de la caisse donnée $1^{m^3},04$. Appelons a l'une de ses dimensions et x la dimension homologue de la caisse à construire. Nous aurons la proportion :

$$1,04 : 2 :: a^3 : x^3,$$

d'où

$$x^3 = a^3 \times \frac{2}{1,04},$$

d'où

$$x = a\sqrt[3]{\frac{2}{1,04}} \quad \text{ou} \quad x = a \times 1,2435,$$

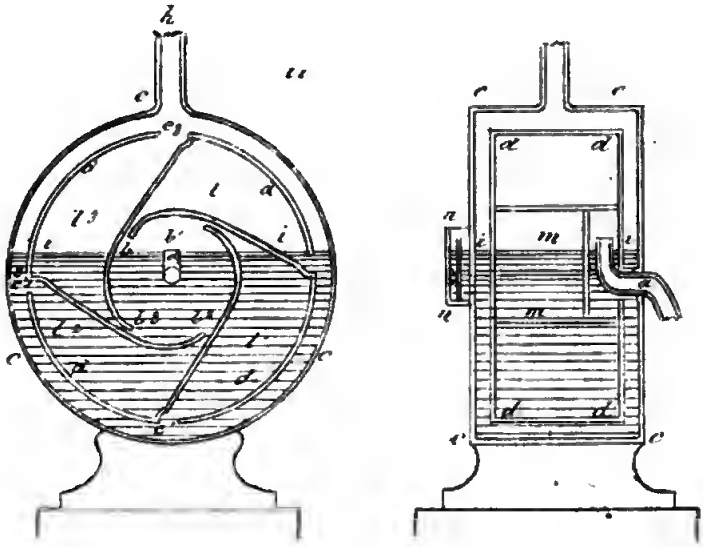
c'est-à-dire que pour avoir chacune des dimensions inconnues il faut multiplier son homologue qui est donnée par 1,2435.

Application 3. — Les cylindres creux à base circulaire constituent la forme généralement adoptée pour le mesurage des liquides et des grains. Ainsi, dans le commerce, le litre a cette forme, son diamètre est $0^m,086$; sa hauteur est le double. Il est facile de s'assurer par le calcul que ce cylindre a la capacité d'un litre. Pour les grains, les cylindres ont un diamètre égal à leur hauteur, le décalitre a pour diamètre $0^m,2335$.

Depuis l'invention de l'éclairage au gaz, on a senti le besoin de mesurer le volume de gaz dépensé par le consommateur. L'instrument qui est destiné à cet effet se nomme *compteur à gaz*. Il en existe dans les caves de tout consommateur qui use des quantités trop variables pour s'abonner à l'année avec les compagnies. Le mécanisme de cet appareil, quoique fort répandu, est généralement peu connu, et on nous saura

peut-être gré de lui donner place ici comme application du mesurage des volumes annulaires cylindriques.

Description d'un compteur à gaz dit système Grafton.



La figure présente une coupe longitudinale et une coupe transversale.

cccc est un cylindre ou tambour fermé de toutes parts à l'exception des centres de ses deux bases et de la partie supérieure où se trouve l'origine *h* d'un tuyau par où s'échappe le gaz mesuré.

Un autre tuyau *a*, adapté au centre d'une des faces, sert à l'introduction du gaz.

dddd est un second cylindre concentrique au précédent, et partagé en compartiments égaux l, l^1, l^2, l^3 par des lames de fer ou de métal étamé. Ces compartiments communiquent par les ouvertures b, b^1, b^2, b^3 avec la capacité qui entoure le tube d'introduction *a*. Puis aux points e, e^1, e^2, e^3 ils communiquent avec l'espace compris entre les deux cylindres.

Le cylindre intérieur tourne librement sur un axe qui le traverse de part en part. Cet axe porte d'une extrémité contre le tuyau *a*, de l'autre contre la paroi d'une capsule *nn*. Une cloison *mm* consolide la position de l'axe. Cet axe porte, à sa

partie située dans la capsule, une roue destinée à communiquer avec un mouvement d'horlogerie qui marque le nombre de révolutions du cylindre mobile.

On verse de l'eau par la capsule, jusqu'à ce qu'elle ait atteint le niveau *ii*, et l'appareil est prêt à fonctionner de la manière suivante :

Le gaz entre par le tuyau *a*; l'espace compris entre la surface de l'eau et la cloison du compartiment l^1 étant rempli, la pression oblige le cylindre à tourner et la cloison à s'élever à mesure qu'il pénètre par l'ouverture b^1 dans le compartiment l^1. Dès que ce compartiment est rempli, l'ouverture b^1 est à son point d'immersion, et l'ouverture e^1 sortant au contraire de l'eau, le gaz s'échappe, et par la continuation du mouvement l'eau s'y substitue et le force à sortir par le tuyau *h*.

La révolution entière du cylindre vide ainsi les quatre compartiments, et leur capacité étant connue, le cadran qui marque le nombre de révolutions décrites permet d'apprécier exactement le volume qui a traversé l'appareil.

Les quatre compartiments constituent le volume annulaire compris entre les deux cylindres *dddd* et $bb^1b^2b^3$. Ce volume est donné par la différence entre celui du grand cylindre et celui du petit, ou $\pi R^2 \times l - \pi r^2 \times l$ ou $\pi(R^2 - r^2) \times l$ (R et *r* désignant les rayons des cylindres et *l* leur hauteur qui figure la largeur de l'appareil). L'expression $\pi(R^2 - r^2) \times l$ peut aussi être considérée comme le produit de la surface annulaire provenant de la différence des cercles, par la largeur *l* de l'instrument.

Application 4. — Cuber un arbre en grume.

On nomme arbres en grume ceux qui sont dépouillés de leurs branches et qui sont prêts à équarrir. On peut les assimiler à des troncs de cône. Mais si on leur appliquait la formule du mesurage de ceux-ci, l'acheteur paierait par le fait l'écorce et l'aubier qui n'ont aucune valeur pour lui. On adopte généralement le procédé suivant : On mesure avec une ficelle les contours des circonférences extrêmes, on prend

les $\frac{1}{48}$ de leur somme, on fait le quarré du résultat et on le multiplie par la longueur de l'arbre.

Application 5. — Jauger un tonneau.

Imaginons perpendiculairement à l'axe du tonneau quatre plans équidistants dont deux se confondent avec les fonds, et considérons les quatre solides compris comme quatre troncs de cônes. On trouve alors que le rayon des sections intermédiaires est à très-peu près $\frac{2R+r}{3}$, en désignant par R et r les rayons du *bouge* et du *fond*. Alors si on appelle l la longueur du tonneau, on trouve pour expression de sa capacité :

$$\frac{\pi l}{54}(23R^2 + 17R \times r + 14r^2),$$

formule qui donne une très-grande approximation quand on augmente le résultat de ses deux centièmes. Les dimensions d'un tonneau bien construit doivent satisfaire à la proportion :

$$l : R : r :: 21 : 18 : 16.$$

Les dimensions de l'hectolitre sont :

$$l = 0^m,572, \quad 2R = 0^m,490, \quad 2r = 0^m,435^*.$$

Si le tonneau n'est plein qu'en partie et qu'on veuille seulement mesurer le volume du liquide existant, on pourra,

---

* Les deux troncs extrêmes vaudront :

$$\frac{2l\pi}{4 \times 3}\left[r^2 + \left(\frac{2R+r}{3}\right)^2 + r\left(\frac{2R+r}{3}\right)\right];$$

les deux intermédiaires vaudront :

$$\frac{2l\pi}{4 \times 3}\left[R^2 + \left(\frac{2R+r}{3}\right)^2 + R\left(\frac{2R+r}{3}\right)\right].$$

Ajoutant, il vient :

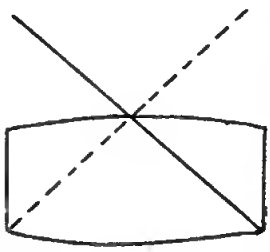
$$\frac{l\pi}{6}\left[r^2 + \left(\frac{2R+r}{3}\right)^2 + r\left(\frac{2R+r}{3}\right) + R^2 + \left(\frac{2R+r}{3}\right)^2 + R\left(\frac{2R+r}{3}\right)\right].$$

Réduisant tous les termes de la parenthèse au même dénominateur, développant et réduisant, nous obtenons :

$$\frac{\pi l}{54}(23R^2 + 14r^2 + 17R \times r).$$

sans erreur sensible, multiplier le résultat donné par la formule précédente, par le rapport de la flèche de la partie pleine au diamètre du bouge. Mais il faut pour cela que ce diamètre ne diffère pas beaucoup de celui du fond.

De la jauge. — La jauge est une longue tringle qu'on plonge dans le tonneau dont on veut mesurer la capacité. On la dispose comme l'indique la figure dans les deux sens, et on note avec soin le point d'affleurement avec le trou dans chacun des cas.



Le milieu de la distance de ces deux points, s'ils sont différents, correspond à un nombre marqué sur cette tringle graduée, qui indique la capacité. La graduation de cet instrument s'opère par l'expérience avec des tonneaux dont les capacités sont connues et dont les dimensions sont dans les rapports énoncés plus haut. Si le tonneau dont on veut mesurer la capacité a des proportions qui s'éloignent de celles que nous avons mentionnées, et dans l'hypothèse desquelles la jauge a été construite, celle-ci ne peut plus servir à déterminer le volume.

Détermination des dimensions d'un tonneau qui ait une capacité voulue.

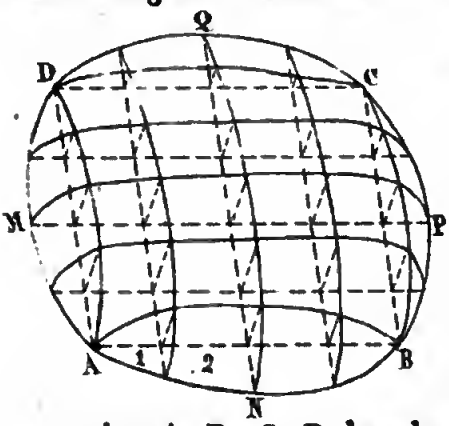
Les volumes semblables étant entre eux comme les cubes de leurs dimensions homologues, nous aurons la proportion : $V : 100^1 :: D^3 : 0{,}430^3$, V désignant le volume donné, 100 litres désignant 1 hectolitre, D le diamètre du bouge cherché, 0,430 celui du bouge de l'hectolitre. La valeur de D se déduira de cette proportion et on obtiendra les deux autres en se servant des rapports de ce diamètre aux deux autres dimensions ; car on sait qu'on a :

$D : d :: 18 : 16$ ou $:: 9 : 8$, $D : l :: 18 : 21$ ou $:: 6 : 7$.

Application 6. — Cuber un volume de forme quelconque.

L'évaluation du volume d'un corps de forme quelconque peut toujours être ramenée à celle du volume compris entre une portion de la surface qui le limite et un plan. Supposons

pour fixer les idées, qu'il s'agisse du volume compris entre le plan MNPQ et la surface courbe limitée à ce plan. Partageons la portion de plan MNPQ en rectangles par deux systèmes de parallèles perpendiculaires l'une à l'autre et d'autant plus rapprochées que nous voudrons plus d'exactitude, sauf à considérer après les quadrilatères et triangles compris entre chacune des parallèles extrêmes, telles que AB par exemple, et la courbe ANB. Elevons des perpendiculaires au plan par chacun des sommets de ces rectangles égaux, nous décomposerons ainsi le volume compris entre la somme de tous ces rectangles et la surface courbe dont cette somme est la projection, en troncs de parallélipipèdes. Chacun d'eux a pour mesure le produit de sa base par le quart de la somme de ses arêtes. Observons que les unes sont communes à quatre troncs, d'autres à trois, d'autres à deux, enfin d'autres n'appartiennent qu'à un seul. (Ces dernières correspondent aux points A, B, C, D dans le cas de la figure et sont égales à zéro). *La somme de tous ces troncs sera donc égale au produit de la surface d'un des rectangles par la somme faite des arêtes communes à quatre troncs, des trois quarts de celle des arêtes communes à trois troncs, de la moitié de celle des arêtes communes à deux troncs, du quart de celles qui n'appartiennent qu'à un tronc.*



Considérons actuellement les solides qui ont pour bases les triangles et quadrilatères dont il a été question. Celui qui a pour base le triangle 1 sera considéré comme un tronc de prisme triangulaire droit, dont deux des arêtes sont nulles, ou comme une pyramide triangulaire. Celui qui a pour base le quadrilatère 2 sera considéré comme un tronc de parallélipipède rectangle qui a deux arêtes nulles. On appliquera à chacun de ces solides le théorème qui lui est spécial.

Il nous reste à dire un mot de la manière dont on pourra obtenir les dimensions des divers éléments nécessaires pour ce calcul. Les moindres notions du lever des plans suffiront pour déterminer les dimensions des bases, et celles du nivellement pour obtenir les hauteurs des arêtes ou les courbes qui joignent leurs extrémités.

Si le volume était de toutes parts terminé par des surfaces courbes, on imaginerait un plan coupant qui séparerait le volume en deux parties dont chacune s'évaluerait comme nous venons de le faire.

Si le corps avait une forme qui ne permît pas de le décomposer en deux parties par un plan, on imaginerait un plan quelconque hors de ce corps, sur lequel on projetterait le contour de ce dernier, et la différence entre la solidité comprise entre ce plan et la partie supérieure au contour projeté sur ce plan, et la solidité comprise entre ce même plan et la partie inférieure, donnerait le volume du corps.

Application 7. — Mesurage du poids des corps homogènes dont on peut calculer le volume.

On appelle *corps homogènes* ceux dont la constitution est la même dans toute leur étendue, et dont les poids sont par conséquent proportionnels aux volumes.

On comprendra d'après cela que si l'on avait une table des poids de l'unité de volume de chacun des corps homogènes, on pourrait mesurer leur poids au moyen de leur volume. Car si l'unité de volume pèse 5 grammes, par exemple, 10 unités de volume peseront 10 fois plus ou 5×10 grammes. Le poids de l'unité de volume se nomme : *poids spécifique*, et dans le cours de physique nous apprendrons par quels moyens on a pu dresser cette table. Le raisonnement que nous venons de faire sur l'exemple précédent, nous apprend que : *Le poids d'un corps est égal au produit de son volume par son poids spécifique.*

Observons que le poids spécifique exprime des grammes si on prend pour unité de volume le centimètre cube, des kilogrammes si on prend le décimètre, et des tonneaux (1000^{kil}) si on prend le mètre cube.

Ex. Quel est le poids d'une sphère en fonte qui aurait $0^m,20$ de diamètre?

La table qui suit donne pour poids spécifique de la fonte 7,207, le poids serait donc

$$\frac{\pi D^3}{6} \times 7,207 \quad \text{ou} \quad \frac{22 \times 20^3 \times 7,207}{7 \times 6} = 30200^{kg}.$$

Cette application est très-utile lorsque les corps ont des dimensions gigantesques ou qu'ils ne sont qu'en projet.

Application 8. — Mesurage des volumes des corps homogènes qui peuvent être pesés.

Nous venons de voir que le poids d'un corps homogène est égal au produit de son volume par son poids spécifique. Il résulte de là que réciproquement: *Le volume d'un corps homogène est égal au quotient de son poids par son poids spécifique.*

Ex. Quel est le volume d'un morceau de fer qui pèse 10033 grammes. On aura :

$$V = \frac{10033}{7,788} = 1280 \text{ centimètres cubes.}$$

TABLE des Poids Spécifiques des principaux corps solides et liquides, à 0° de température.

SOLIDES.

		kg		kg
Platine	laminé.....	22,6690	Acier non écroui.....	7,8163
	purifié.....	19,5000	Fer en barre.....	7,7880
Or	forgé.....	19,3617	Etain coulé.....	7,2914
	coulé.....	19,2581	Fer fondu.....	7,2070
Plomb coulé.....		11,3523	Zinc coulé.....	6,8610
Argent coulé.....		10,4743	Chaux carbonatée cristallisée.....	2,7182
Cuivre en fil.....		8,8785	Chaux sulfatée cristall.	2,3117
Cuivre rouge coulé....		8,7880		

	kg		kg
Cristal de roche pur...	2,6530	Orme	0,8000
Verre blanc de Saint-Gobain	2,4882	Sapin jaune.....	0,6570
Houille compacte.....	1,3292	Glace	0,9300
Bois de hêtre.....	0,8520	Tilleul.....	0,6040
Frêne	0,7450	Peuplier	0,3830
		Liége.....	0,2400

LIQUIDES.

Mercure	13,6980	Eau distillée.....	1,0000
Acide sulfurique.....	1,8409	Vin de Bourgogne....	0,9215
Acide nitrique.....	1,2175	Huile d'olive.....	0,9153
Eau de la mer.....	1,0263	Alcool absolu.....	0,7920
Lait.....	1,0300	Ether sulfurique.....	0,7155

Poids Spécifiques de diverses substances qui n'ont pu être déterminés d'une manière aussi précise; le mètre cube étant l'unité de volume.

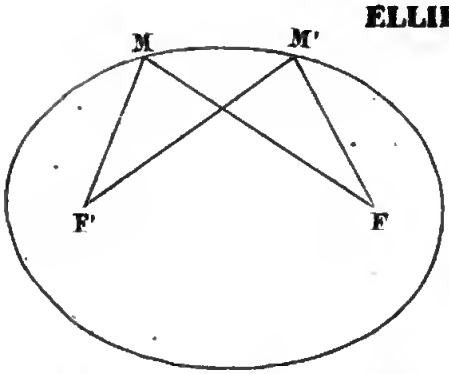
	kg
Pierre à plâtre ordinaire.....	2168
Gypse ou plâtre fin	2264
Pierre meulière.....	2484
Marbre noir et blanc	2717
Briques { les plus cuites	2200
Briques { les moins cuites.....	1500
Tuiles ordinaires.....	2000
Sable pur	1900
Sable terreux	1700
Terre végétale ordinaire.....	1400
Terre argileuse.....	1600
Terre glaise	1900
Maçonnerie de moellons ordinaires	2300
Chêne le plus pesant, le cœur.....	1170
Chêne le plus léger, sec.....	850
Huile de lin.....	940
Huile de navette.....	919
Alcool ordinaire ou esprit de vin.....	837

FIN DES EXERCICES ET APPLICATIONS DU SEPTIÈME LIVRE.

LIVRE HUITIÈME.

DES COURBES.

ELLIPSE.



C'est une courbe telle, que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes est constante et égale à une ligne donnée.

Elle a la forme de cette figure. Les deux points fixes F', F se nomment *foyers*. Ainsi on a :

$$F'M + FM = F'M' + FM'.$$

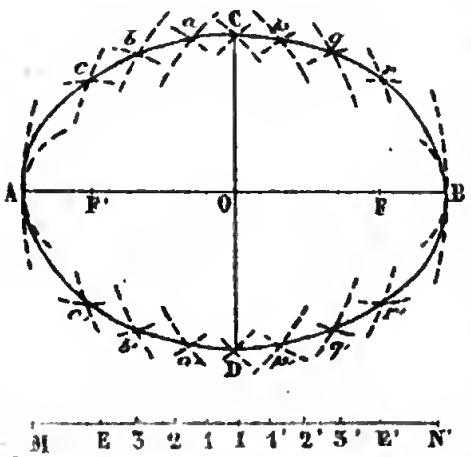
Ces distances sont désignées sous le nom de *rayons vecteurs*.

Tracé de cette courbe par points. — Soient F et F' les deux foyers, MN la somme des rayons vecteurs plus grande que FF'. Prenons le milieu I de MN et portons de chaque côté de ce point un certain nombre de divisions égales et arbitraires. De chacun des foyers F et F' avec la distance MI décrivons des arcs de cercle. Des mêmes foyers avec la

distance N1 décrivons d'autres arcs de cercle ; ils coupent les premiers en a, a'; p, p', qui sont évidemment quatre points de la courbe. Adoptons pour nouveaux rayons les distances successives M2, N2 ; M3, N3, etc., et opérons des mêmes foyers comme centres, nous aurons les points b, b'; q, q'; c, c'; r, r', etc. Joignons tous ces points et nous aurons la courbe.

Il est évident que les rayons M1', N1'; M2', N2', etc., passant par les mêmes grandeurs que ceux dont on s'est déjà servi donneront les mêmes points que ceux obtenus.

Points remarquables de la courbe. — Les points C et D sont obtenus avec les rayons MI, IN égaux chacun à la moitié de MN. Les points A et B où la courbe coupe la droite FF' prolongée donnent aussi lieu à la relation FA + F'A = MN et FB + F'B = MN. Comme ces points sont sur la ligne des centres, les cercles qui les donnent sont tangents. Pour obtenir leurs rayons, nous remarquerons d'abord qu'à cause de la symétrie des constructions F'A = FB. Donc FA + F'A = FA + FB ou AB. D'ailleurs FA + F'A = MN ; donc AB = MN. F'A ou FB est par conséquent la demi-différence entre MN et FF', et par suite F'B ou FA est égale à cette demi-différence augmentée de F'F. Mais si nous observons que le milieu O de F'F est aussi celui de AB, il sera plus simple, pour obtenir les points A et B, de porter de chaque côté du point O la moitié de MN.



Discussion de la courbe. — Il faut, pour ce tracé, que les couples de circonférences décrites avec M1, N1 ; M2, N2, etc., se rencontrent, c'est-à-dire que (pour les cercles autres que ceux qui ont donné les points A et B) la distance des centres FF' soit plus petite que la somme des rayons,

et plus grande que leur différence. La première condition est toujours satisfaite, puisqu'en vertu des données FF' est plus petite que MN. Quant à la seconde, elle le sera pourvu que la distance du point M au dernier point de division E soit plus grande que BF ou AF', car on a : $F'B - BF = FF'$. Or, si ME est plus grand que FB, NE sera plus petit que F'B, puisque la somme ME + NE est égale à MN aussi bien que F'B + BF. Donc, pour cette double raison, on aura : $NE - ME < FF'$; à plus forte raison la condition sera-t-elle satisfaite pour les rayons M3, N3, etc. Il résulte de là qu'après avoir porté AF' ou BF de M en E, il sera inutile de prendre des rayons plus petits que ME.

La courbe est symétrique par rapport à CD puisque les constructions qui ont été faites de chaque côté sont les mêmes. Elle est aussi symétrique par rapport à AB, parce que les points *a*, *a'*, etc., sont les extrémités d'une corde commune à deux cercles qui se coupent.

La droite AB se nomme *le grand axe ;* CD est dite *le petit axe*. Les quatre extrémités A, B, C, D des axes sont *les sommets* de la courbe.

RÉSUMÉ.

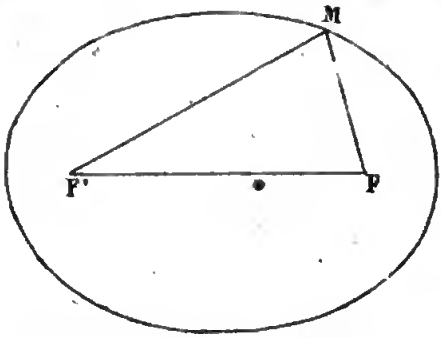
1° *Les extrémités du petit axe sont distantes de chacun des foyers d'une grandeur égale à la demi-somme des rayons vecteurs.*

2° *Les extrémités du grand axe sont distantes de chacun des foyers d'une grandeur égale à la demi-différence entre la somme des rayons vecteurs et la distance des foyers.*

3° *Le grand axe est égal à la somme des rayons vecteurs.*

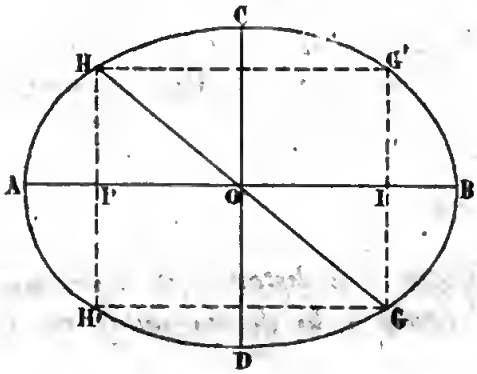
4° *L'ellipse est partagée en deux parties égales par chacun des axes.*

Tracé de l'ellipse d'un mouvement continu. — Supposons donnés comme précédemment les deux points fixes et la somme des rayons vecteurs ou le grand axe. Plantons deux fiches



aux deux foyers, puis prenons un fil ou une ficelle égale en longneur à la somme des rayons vecteurs, augmentée de la distance des foyers; nonons les extrémités et enveloppons les deux fiches avec ce fil, formons-en un triangle variable F'MF, dont le sommet M sera déterminé par la tension de ce même fil. Un crayon ou un style tenu en M servira à décrire la courbe.

Théorème 1. — *Le milieu du grand axe est le centre de la courbe, c'est-à-dire que toute droite qui y passe et qui est limitée à la courbe est divisée en deux parties égales.*



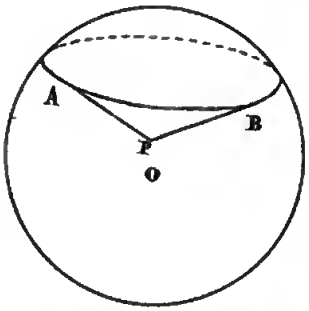
Prenons en effet sur le grand axe, à partir de son milieu, deux points I et I' équidistants; en chacun d'eux élevons en sens inverses les perpendiculaires I'H et IG, joignons HO et GO. A cause de la symétrie de la figure par rapport au petit axe, la perpendiculaire I'H est égale à IG', et celle-ci est à son tour égale à IG à cause de la symétrie de la figure par rapport au grand axe. Donc HI' = IG. D'ailleurs I'O = IO par construction; les angles en I' et I sont droits, par suite les deux triangles I'OH et IOG sont égaux; donc OH = OG et l'angle HOI' = IOG. Or I'OI est une ligne droite, HOG en sera une puisqu'elle forme avec la première des angles non adjacents égaux. Donc la droite HG est divisée en deux parties égales par le point O.

Scholie. — C'est pour cette raison que toute droite qui passe par le milieu O s'appelle *un diamètre*.

Corollaire. — Si l'on prolonge la perpendiculaire HI', et qu'on joigne les extrémités H,G' et H',G', la corde HH', double de HI', sera égale à GG', double de GI, et à cause de la symétrie de ces cordes par rapport à l'axe CD, la figure HG'GH' sera un rectangle. Comme dans un rectangle les diagonales sont égales, le point O pourra être considéré comme le centre d'un cercle circonscrit à ce rectangle. Cette propriété est utile pour trouver les axes d'une ellipse quand on n'a que le centre et le contour.

THÉORÈME 2. — *La section faite dans un cylindre droit circulaire, par un plan qui coupe toutes les génératrices, est une ellipse.*

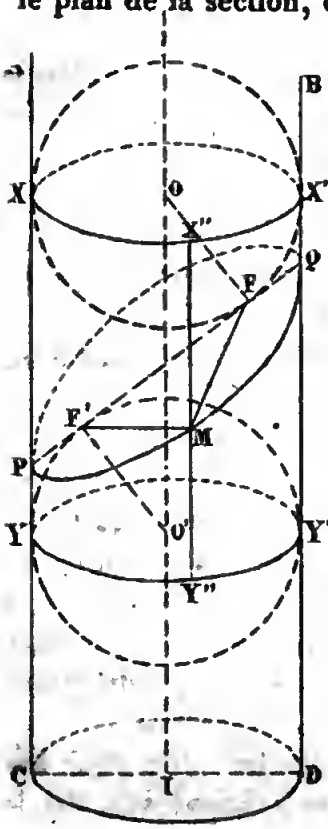
Principe. — Les tangentes menées d'un même point à une sphère sont égales.



Soient PA, PB les deux tangentes à la sphère O. Si nous faisons passer un plan par les deux droites PA, PB, il coupera la sphère suivant un cercle auquel PA, PB sont tangentes, et alors la proposition est démontrée en vertu de la remarque du problème 12 du livre deuxième.

Ce principe posé, considérons le cylindre qui a pour base le cercle CID (figuré ici en perspective). Soient AC, BD les deux génératrices qu'on obtient en coupant ce cylindre par un plan méridien perpendiculaire à celui de la section PMQ. Soit PQ la trace de cette section sur ce même méridien. Menons un cercle tangent aux trois droites PQ, AC, BD. Le problème 14 du deuxième livre en donne deux dont les centres sont par exemple O et O'. Soient F et F' leurs points de contact avec la droite PQ, et X et Y ceux de ces mêmes cercles avec la génératrice AC. Faisons tourner les circonférences et la génératrice AC autour de l'axe ; celle-ci engendrera le cylindre et les circonférences engendreront des sphères tangentes à ce dernier. Je dis qu'elles seront aussi tangentes en F' et F au

plan de la section, ou, en d'autres termes, les rayons OF' et OF seront perpendiculaires au plan de la section. Car déjà O'F' et OF sont perpendiculaires à PQ, elles le sont aussi respectivement aux deux droites menées par les points F' et F dans le plan de la section, et qui formeraient avec O'F', OF l'angle rectiligne servant de mesure au dièdre droit du méridien et du plan PQM; donc elles le sont au plan PQM qui passe par PQ et chacune de ces deux autres droites. Les points de contact X, Y décriront des parallèles XX', YY' dont la distance XY est égale à PQ. En effet, on a, entre les tangentes suivantes, les relations :



$$PY = PF'$$
$$PX = PF.$$

Ajontant, il vient :

$$PY + PX \quad \text{ou} \quad XY = PF' + PF \quad (1).$$

De même :

$$QX' = QF$$
$$QY' = QF'.$$

Ajontant, on obtient :

$$QX' + QY' \quad \text{ou} \quad X'Y' = QF + QF' \quad (2).$$

Faisant la somme des deux membres des relations (1) et (2), et remarquant que $XY = X'Y'$, on a :

$$2XY = PF' + PF + QF + QF';$$

mais $PF' + QF' = PQ$ et $PF + QF = PQ$. Donc

$$2XY = 2PQ \quad \text{ou} \quad XY = PQ.$$

Cela posé, soit M un point de la conrbe de section PMQ, joignons-le aux deux points de contact F' et F des sphères, puis menons la génératrice Y''X'' par le point M; elle sera évidemment tangente aux deux sphères sur les parallèles XX', YY' en X'' et Y'', par conséquent égale à XY ou PQ. Or, $MF' = MY''$ comme tangentes menées du même point M

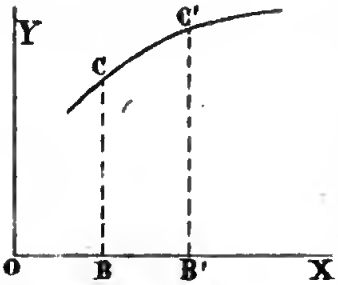
à la même sphère O'. De même MF = MX'' comme tangentes à la sphère O. Donc

$$MF' + MF = MY'' + MX'' \text{ ou } X''Y'' \text{ ou } PQ:$$

c'est-à-dire que la somme des distances de tout point pris sur la courbe aux deux points fixes F' et F est constante et égale à PQ. Cette courbe est donc une ellipse dont PQ est le grand axe et dont les points de contact des sphères avec le plan de la section sont les foyers.

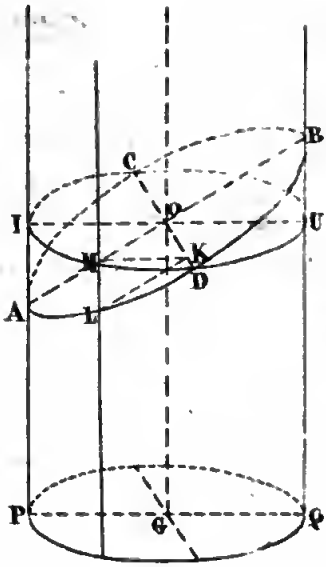
Théorème 3. — *Si, sur le petit axe d'une ellipse comme diamètre, on décrit une demi-circonférence et qu'on le considère comme axe des abscisses ; les ordonnées de l'ellipse et celles du cercle, correspondantes à la même abscisse, sont entre elles comme le demi grand axe est au demi petit axe.*

Nota. Si on projette les divers points d'une courbe CC' sur une droite OX située dans son plan, les perpendiculaires qui projettent ces points s'appellent *les ordonnées de ces points*, et les distances de leurs pieds à un point fixe pris sur la droite s'appellent *les abscisses de ces points*. La droite OX se nomme *l'axe des abscisses*, et la parallèle OY aux ordonnées, menée par le point fixe, se nomme *l'axe des ordonnées*. Les abscisses et ordonnées portent la dénomination commune de *coordonnées*, et le point fixe est dit *l'origine des coordonnées*.

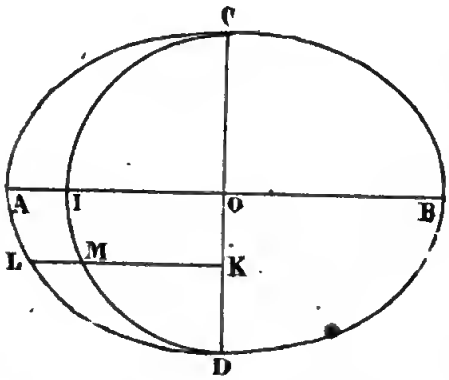


Ex. CB ordonnée, OB abscisse du point C ; C'B' ordonnée, OB' abscisse du point C'.

Soit PQIB un cylindre circulaire droit ayant pour base la circonférence PGQ (figurée ici en perspective). Soient PI et BQ les deux génératrices de section d'un méridien et ICUD le cercle de section par un parallèle. Ce cercle sera évidemment égal à celui de la base ; IU sera le diamètre suivant lequel le coupe le plan méridien conduit suivant PQ, et la perpendiculaire CD à ce méridien, élevée au milieu de IU, sera aussi un diamètre de ce cercle. Coupons le cylindre par un plan quelconque conduit suivant CD, la section ABCD



sera une ellipse dont le grand axe sera la trace AB de ce plan sur le méridien, dont O sera le centre et CD le petit axe, de sorte que l'ellipse a pour petit axe le diamètre du cercle ICUD. Considérons une génératrice quelconque ML du cylindre et soient M et L les points où elle rencontre le cercle et l'ellipse. Abaissons de chacun de ces points des perpendiculaires MK, LK sur CD, elles seront parallèles à IO et AO qui sont aussi perpendiculaires à CD et elles se couperont en un même point K, parce qu'elles peuvent être considérées comme situées dans un plan parallèle au méridien IPQB. Alors les triangles IOA et MKL sont semblables comme formés de côtés parallèles, et donnent la proportion : MK, ordonnée du cercle qui a pour abscisse OK, est à KL, ordonnée de l'ellipse qui a la même abscisse, comme IO ou son égal OC, le demi petit axe, est à OA, le demi grand axe.

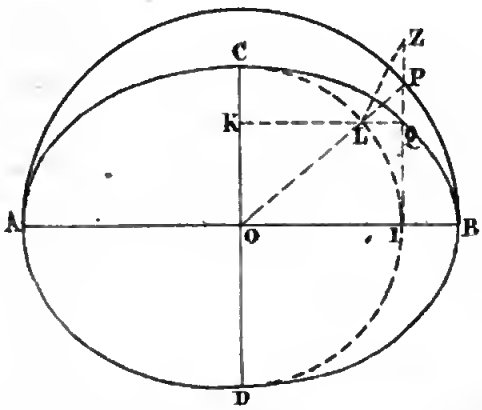


Si on suppose le plan de l'ellipse rabattu sur celui du cercle autour de CD comme axe, le demi grand axe OA couvrira OI, et l'ordonnée LK couvrira MK ; la figure vue de face aura la disposition que voici. On n'en aura pas moins :

MK : KL :: IO ou OC : AO.

Théorème 4. — *Si sur le grand axe d'une ellipse comme diamètre on décrit une demi-circonférence, et qu'on le prenne pour axe des abscisses, les ordonnées de l'ellipse*

et celles du cercle correspondantes à la même abscisse, sont entre elles comme le demi petit axe est au demi grand axe.



Je dis qu'on aura :

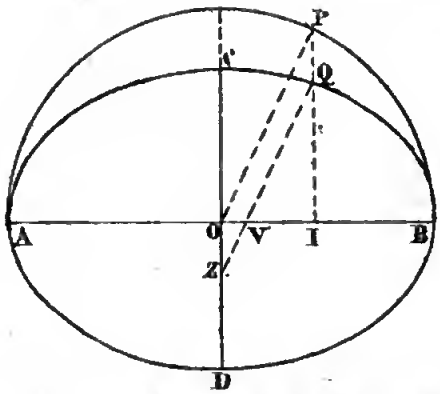
IQ : IP :: OC : OB.

Décrivons une demi-circonférence sur le petit axe comme diamètre, et abaissons sur ce diamètre la perpendiculaire QK, nous venons de voir qu'on aurait : KL : KQ :: OC : OB. Joignons OL et prouvons que cette droite passera par le point P. Car si cela n'avait pas lieu, alors OL prolongée irait rencontrer PI au-dessus ou au-dessous du point P, au-dessus par exemple en Z. Alors les deux triangles rectangles KLO et OZI seraient semblables et nous donneraient : KL : OI :: OL : OZ. Comparons cette proportion avec la précédente et observons que OI = KQ, OL = OC ; alors elles ont trois termes correspondants égaux, donc les quatrièmes le sont et OZ = OB, ce qui ne peut avoir lieu à moins que le point Z se confonde avec le point P. Dès-lors, dans le triangle POI, LQ est parallèle à la base, et on a :

IQ : IP :: OL : OP ou :: OC : OB.

Théorème 5. — *Si d'un point quelconque de l'ellipse comme centre avec le demi grand axe pour rayon, on décrit un arc de cercle, et qu'on joigne à ce point l'intersection de cet arc avec le petit axe, sa distance à l'intersection de la nouvelle droite avec le grand axe est égale au demi petit axe.*

Ainsi QZ étant égal au demi grand axe, nous voulons prouver que QV est égale au demi petit axe. En effet, sur le grand axe AB comme diamètre décrivons une demi-circonférence, et par le centre O menons OP parallèle à ZQ ;



joignons PQ et prolongeons cette droite jusqu'à sa rencontre I avec l'axe AB. La figure OPQZ est un parallélogramme à cause des côtés égaux et parallèles OP et ZQ, savoir : OP = OB comme rayons du même cercle, et OB = ZQ par hypothèse ; enfin OP parallèle à ZQ par construction. Donc PQ ou PI est parallèle à OZ, et comme OZ est perpendiculaire à AB, IP le sera ; de sorte que IP, IQ sont bien des ordonnées du cercle et de l'ellipse. D'après le théorème précédent, nous aurons :

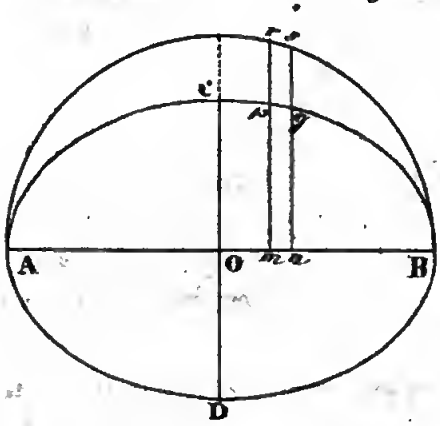
IQ : IP :: OC : OB.

Les triangles semblables POI et QVI nous donnent d'ailleurs :

IQ : IP :: QV : OP ou OB.

Ces deux proportions ont trois termes correspondants égaux ; donc les quatrièmes OC et QV le sont. Ce qu'il fallait démontrer *.

Théorème 6. — *La surface d'une ellipse est égale au produit des deux demi-axes par le rapport de la circonférence à son diamètre.*



Sur le grand axe AB décrivons une demi-circonférence et menons les deux ordonnées très-voisines *mr*, *ns*. Les petits trapèzes *mnpq* et *mnrs*,

* Ce théorème sert de principe à la construction du compas d'ellipse qui sera décrit plus loin.

compris entre elles, pourront être considérés comme des petits rectangles de même base mn, et dont les surfaces seront par conséquent entre elles comme les hauteurs mp, mr ou comme le demi petit axe OC est au demi grand OB, puisque le rapport des ordonnées mp, mr est égal à ce dernier. Il en sera de même des trapèzes voisins et des inférieurs auxquels donnerait lieu une construction analogue. Si nous désignons par S, S′, S″, etc., ceux qui font partie du cercle, et par s, s', s'', etc., les correspondants de l'ellipse, nous aurons :

$$S : s :: OB : OC$$
$$S' : s' :: OB : OC$$
$$S'' : s'' :: OB : OC,$$

d'où l'on tire :

$$S : s :: S' : s' :: S'' : s'' :: \text{etc.}$$

Dans cette suite, on peut dire : la somme des antécédents est à la somme des conséquents, comme un antécédent est à son conséquent :

$S+S'+S''+\text{etc.} : s+s'+s''+\text{etc.} :: S : s$ ou $:: OB : OC$.

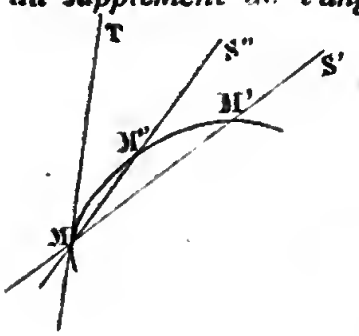
Mais $S+S'+S''+\text{etc.}$, donne la surface du cercle ou $\pi.OB^2$; $s+s'+s''+\text{etc.}$, désigne celle de l'ellipse ou X, la proportion devient donc :

$$\pi.OB^2 : X :: OB : OC,$$

d'où

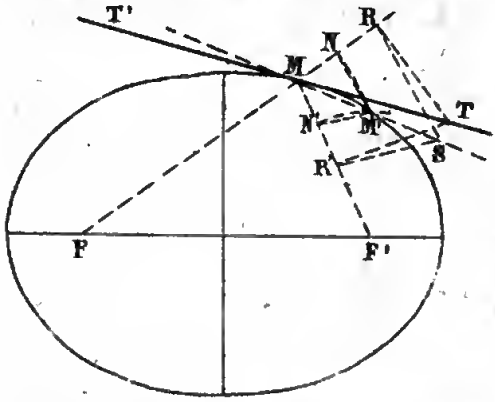
$$X = \frac{\pi.OB^2 \times OC}{OB} \text{ ou plus simplement } \pi.OB \times OC.$$

Théorème 7. — *La tangente à l'ellipse est bissectrice du supplément de l'angle des rayons vecteurs qui aboutissent au point de contact.*



Nota. La définition de la tangente au cercle est en défaut pour un grand nombre de courbes. Considérons donc la tangente sous un point de vue plus général. Soit M un point fixe pris sur une courbe M′M″.... et soient M′, M″, etc., diverses positions d'un second point

considéré comme mobile sur la courbe et pouvant s'approcher autant qu'on veut de M; la sécante déterminée par ces deux points prend diverses positions MS', MS'', etc., et s'approche autant qu'on veut d'une position MT pour laquelle le point mobile se confond avec le point fixe. Cette position *limite* est celle de la tangente au point M.



Considérons l'ellipse dont F, F' sont les foyers et M un point de la courbe; pour avoir un second point M', prolongeons le rayon vecteur FM d'une quantité quelconque MN, et diminuons le rayon F'M d'une grandeur égale MN'; de cette manière la somme reste constante. Des centres F et F' décrivons les arcs NM', N'M', puis menons la sécante MM'. Tout point S pris sur cette sécante jouit de cette propriété: si l'on mène SR, SR' parallèles aux cordes M'N, M'N', on aura MR = MR'. Car on a évidemment:

$$MR : MN :: MS : MM' \quad \text{et} \quad MR' : MN' :: MS : MM'.$$

Ces deux proportions ont un rapport commun, donc

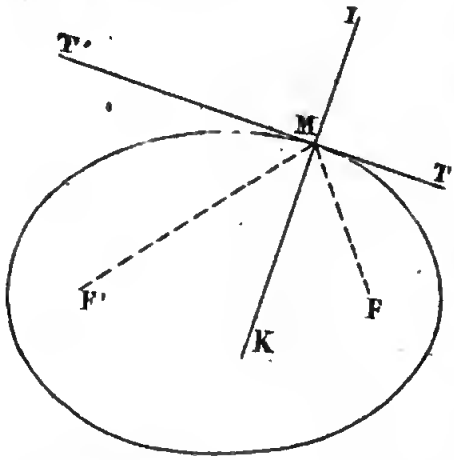
$$MR : MN :: MR' : MN'.$$

Or, MN = MN', donc MR = MR'. Cela posé, à mesure que M'M diminue, les cordes M'N, M'N' s'approchent de plus en plus des tangentes en N et N' aux arcs de cercle, et par conséquent les angles M'NM et M'N'M approchent de plus en plus d'être droits. Il en est de même des angles SRM, SR'M. Ils sont droits quand la sécante MS est devenue tangente. Alors si T est la nouvelle position du point S, et TR, TR' celles de SR, SR', les triangles TMR, TMR' seront égaux comme rectangles en R et R' ayant l'hypothénuse commune MT et un côté égal chacun à chacun, savoir MR = MR'. Donc les angles TMR et TMR' sont égaux et MT est la bissectrice de l'angle RMF' qui est supplémentaire de FMF'.

Corollaire 1. — *La tangente fait des angles égaux avec les rayons vecteurs qui passent par le point de contact.*

Les angles TMF', T'MF sont égaux. En effet, il vient d'être démontré que l'angle RMT est égal à l'angle F'MT. Or l'angle T'MF est aussi égal à l'angle RMT comme opposé à ce dernier par le sommet. Donc T'MF = F'MT.

Corollaire 2. — *La normale à l'ellipse est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs.*



Nota. On appelle normale à une courbe, la perpendiculaire à la tangente élevée au point de contact.

Soit MI la normale à l'ellipse; d'après la définition, les angles T'MK et TMK sont droits, retranchons de chacun d'eux les angles égaux T'MF' et TMF, il reste les angles égaux F'MK et FMK, ce qu'il fallait démontrer.

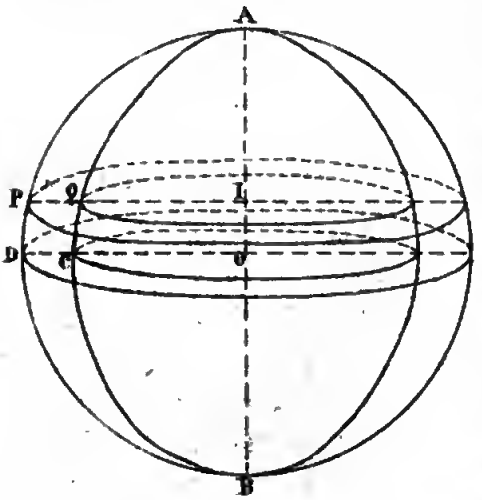
Théorème 8. — *Le volume d'un ellipsoïde est égal aux deux tiers de celui d'un cylindre qui a pour base l'équateur et pour hauteur l'axe de l'ellipse génératrice autour duquel se fait le mouvement.*

Nota. L'ellipsoïde est le volume engendré par une demi-ellipse tournant autour d'un de ses axes; l'autre axe engendre alors un cercle qui est dit *l'équateur*. L'ellipsoïde est *alongé* si l'ellipse génératrice tourne autour de son grand axe; il est dit *aplati* si elle tourne autour de son petit axe.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'un ellipsoïde alongé, et démontrons que le volume de cet ellipsoïde est à celui de la sphère qui a pour diamètre l'axe de rotation comme le quarré du demi petit axe de l'ellipse génératrice est au quarré du demi grand axe.

Soient ACB la demi-ellipse génératrice de l'ellipsoïde, et ADB la demi-circonférence génératrice de la sphère. Coupons

les deux solides par des parallèles très-rapprochés, nous les décomposerons ainsi en troncs de cône. Soient DO et PI les rayons des cercles de bases de l'un des troncs élémentaires de la sphère ; CO et QI ceux du tronc correspondant de l'ellipsoïde. Le point O étant le centre de l'ellipse, CO et DO ou son égal AO seront les demi-axes de l'ellipse que nous désignerons par a et A ; PI et QI seront évidemment des ordonnées du cercle et de l'ellipse correspondantes à la même abscisse OI, et seront entre elles comme les demi-axes. Cela posé, le volume du tronc élémentaire de la sphère sera donné par la formule :



$$\frac{\pi \times h}{3}(DO^2 + PI^2 + DO \times PI);$$

h désignant la hauteur de ce tronc. Celui du tronc correspondant de l'ellipsoïde sera :

$$\frac{\pi \times h}{3}(CO^2 + QI^2 + CO \times QI);$$

mais $CO : DO :: a : A$ et $QI : PI :: a : A$, d'où $CO = \frac{DO \times a}{A}$ et $QI = \frac{PI \times a}{A}$, par suite : $CO^2 = \frac{DO^2 \times a^2}{A^2}$ et $QI^2 = \frac{PI^2 \times a^2}{A^2}$, remplaçant CO^2, QI^2, CO et QI par leurs valeurs dans l'expression précédente, elle deviendra :

$$\frac{\pi \times h}{3}\left(\frac{DO^2 \times a^2}{A^2} + \frac{PI^2 \times a^2}{A^2} + \frac{DO \times a}{A} \times \frac{PI \times a}{A}\right)$$

ou

$$\frac{\pi \times h}{3}(DO^2 + PI^2 + DO \times PI) \times \frac{a^2}{A^2}.$$

Or, cette expression n'est autre que le produit du tronc élémentaire de la sphère par le rapport $\frac{a^2}{A^2}$. Donc en appelant

T le tronc de la sphère et t le correspondant de l'ellipsoïde, $t = \frac{T \times a^2}{A^2}$, expression qui donne lieu à la proportion :

$$t : T :: a^2 : A^2.$$

Il en sera de même des troncs de cônes successifs dans lesquels se décomposeront l'ellipsoïde et la sphère par une construction analogue. Si nous désignons par t', t'', etc., les premiers, et T', T'', etc., les seconds, nous aurons :

$$t : T :: a^2 : A^2$$
$$t' : T' :: a^2 : A^2$$
$$t'' : T'' :: a^2 : A^2,$$

d'où l'on tire :

$$t : T :: t' : T' :: t'' : T'' :: \text{etc.},$$

et par suite :

$t + t' + t'' + \text{etc.} : T + T' + T'' + \text{etc.} :: t : T$ ou $:: a^2 : A^2$;

mais $t + t' + t'' + \text{etc.}$, désigne le volume de l'ellipsoïde ou X, et $T + T' + T'' + \text{etc.}$, celui de la sphère ou $\frac{4}{3}\pi A^3$, la proportion devient donc :

$$X : \tfrac{4}{3}\pi A^3 :: a^2 : A^2.$$

Ce que nous nous proposions de démontrer plus haut. Si nous dégageons X, nous trouvons :

$$X = \frac{4.\pi A^3 \times a^2}{3.A^2} \quad \text{ou} \quad \frac{4.\pi A \times a^2}{3},$$

qu'on peut mettre sous la forme :

$$\tfrac{2}{3}\pi a^2 \times 2A.$$

Or, πa^2 est la surface de l'équateur de l'ellipsoïde, 2A est son axe de rotation, donc $\pi a^2 \times 2A$ est le cylindre de l'énoncé dont on prend les $\frac{2}{3}$.

Des considérations analogues conduiraient au volume de l'ellipsoïde aplati :

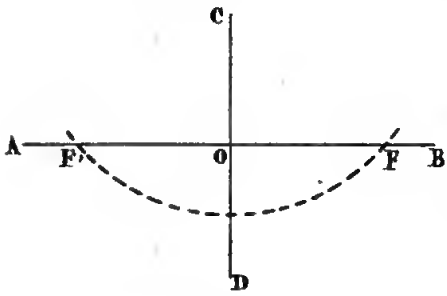
$$\tfrac{2}{3}\pi A^2 \times 2a.$$

PROBLÈMES ET EXERCICES SUR L'ELLIPSE.

Problème 1. — *Dessiner par points une ellipse dont on donne la distance des foyers ou l'excentricité égale à* $3^m,50$, *la somme des rayons vecteurs égale à* $5^m,50$ (consultez le tracé de cette courbe, page 338).

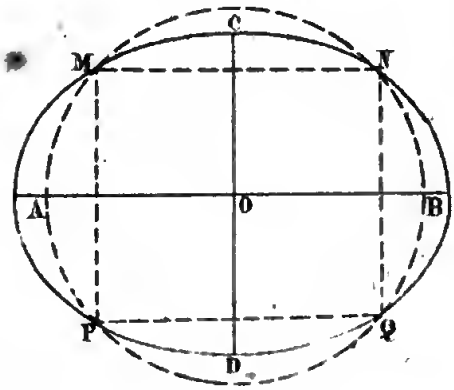
Problème 2. — *Etant donnés les deux axes d'une ellipse, trouver ses foyers.*

Analyse. — Rappelons-nous que les distances de chacune des extrémités du petit axe aux deux foyers sont égales au demi grand axe.



Synthèse. — De l'extrémité C du petit axe, décrivez un arc de cercle avec le demi grand axe pour rayon; les deux points de rencontre de cet arc avec le grand axe donneront les deux foyers.

Problème 3. — *Trouver les axes d'une ellipse dont on n'a que le contour et le centre.*

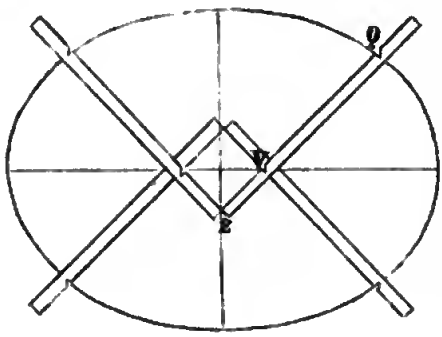


Analyse. — Le corollaire du théorème 1 nous apprend que tout cercle décrit du centre de l'ellipse et qui la coupe en quatre points, détermine les sommets d'un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes.

Synthèse. — Du centre O,

avec un rayon arbitraire, décrivez une circonférence qui coupe l'ellipse en quatre points M, N, P, Q. Joignez ces points en suivant le contour de l'ellipse, vous formerez un rectangle inscrit ; par le centre menez des parallèles aux deux côtés adjacents de ce rectangle, elles ne seront autres que les axes.

Problème 4. — *Construire par points une ellipse dont on donne les axes en grandeur et en direction.*

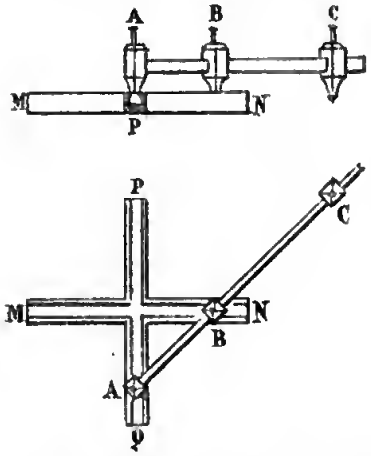


Analyse.—Le théorème 5 nous apprend que si, sur une droite, on a marqué, à partir du même point Q, les grandeurs QV, QZ du demi petit axe et du demi grand axe, et qu'on fasse glisser cette droite de manière que le point Z ne quitte pas le petit axe et que le point V ne quitte pas le grand, les diverses positions du point Q donneront des points de l'ellipse.

Synthèse. — S'il s'agit de dessiner l'ellipse sur une épure, prenez une bande de papier dont l'un des bords soit en ligne droite ; s'il s'agit d'un dessin de plus grandes dimensions, prenez une règle ou un cordeau ; marquez-y à partir du même point, le demi grand axe QZ, le demi petit QV, faites glisser cette bande, cette règle ou ce cordeau, de telle sorte que le point Z ne quitte pas le petit axe, le point V ne quitte pas le grand, et le point Q décrira l'ellipse ou en donnera autant de points qu'on voudra. La figure représente la position de la bande dans chacun des quarts d'ellipse.

Le compas d'ellipse est construit d'après le même principe. Il se compose d'une longue tige en bois sur laquelle glissent trois poupées A, B, C qu'on fixe au moyen de vis de pression. Chacune de ces poupées porte à son pied un patin qui peut tourner autour de son axe. Ces patins glissent dans les

coulisses de deux règles MN, PQ, assemblées d'équerre. La troisième porte une pointe à tracer.

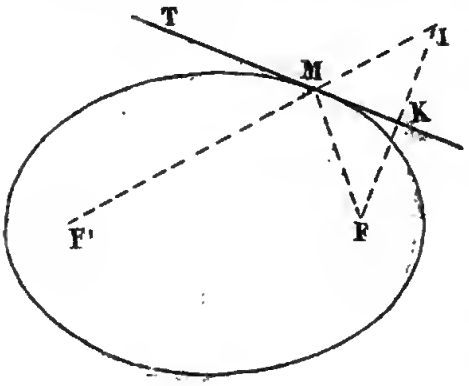


Manière de s'en servir. — On fixe la poupée A sur la tige au moyen de sa vis de pression, on place la seconde à une distance de celle-ci, marquée par la différence des deux demi-axes de l'ellipse, et la troisième à une distance de la première, marquée par le demi grand axe (ces distances sont prises d'un axe à l'autre de chacune des poupées), et l'instrument est prêt à fonctionner. On fixe par deux pointes les coulisses en croix, de manière que leurs axes se confondent avec les directions des axes de l'ellipse, et on fait mouvoir la pointe.

Il est évident que dès que la différence des axes est plus grande que l'une des branches des coulisses ou que le demi grand axe est plus grand que la tige, l'instrument n'a plus des dimensions suffisantes et il faut recourir à un plus grand.

Problème 5. — *Mener une tangente à l'ellipse par un point donné sur la courbe.*

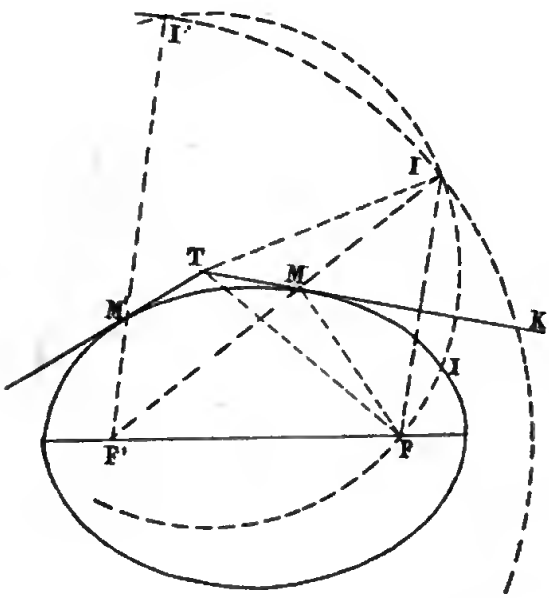
Analyse. — La tangente en un point donné de l'ellipse est bissectrice du supplément de l'angle des rayons vecteurs qui aboutissent à ce point.



Synthèse. — Joignez le point de contact M aux deux foyers, prolongez l'un d'eux F'M d'une longueur MI égale à l'autre MF, joignez le point I au foyer F, prenez le milieu de IF et

joignez-le au point de contact, la droite KM ainsi obtenue est la tangente. Car le triangle IMF est isocèle, et on sait que la droite qui joint le sommet M au milieu de la base est bissectrice de l'angle au sommet.

Problème 6. — *Mener une tangente à l'ellipse par un point extérieur.*

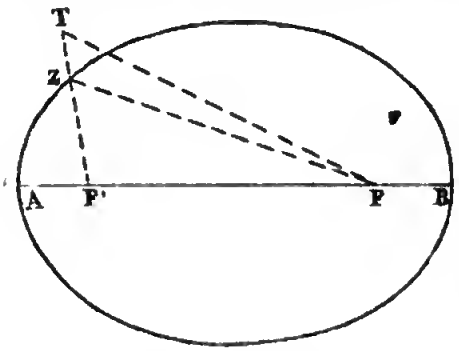


Analyse. — Supposons que T soit le point donné et que M soit le point de contact, joignons-le aux deux foyers et faisons la construction précédente. Mais au lieu de prendre le point M pour inconnue, prenons le point I. Car si ce dernier était connu, en le joignant au foyer F', on aurait le point M. Or, F'I est égale à F'M + FM ou au grand axe; donc en décrivant un cercle du foyer F' comme centre avec le grand axe pour rayon, le point I se trouvera sur sa circonférence. Joignons le point donné T aux deux points I et F, on aura évidemment TI = TF. Or, la distance TF est connue; donc en décrivant une autre circonférence du point donné comme centre avec sa distance à l'autre foyer F pour rayon, le point I se trouvera aussi sur son contour. Il sera donc situé à l'intersection des deux circonférences.

Synthèse. — De l'un quelconque des foyers F' avec le grand axe pour rayon décrivez une circonférence. Du point donné T avec sa distance à l'autre foyer F décrivez-en une autre, joignez les deux points d'intersection I, I' au foyer F'.

Les points de rencontre M, M′ des droites IF′, I′F′ avec la courbe, donnent lieu aux deux tangentes TM, TM′.

Discussion. — Le problème est susceptible de deux solutions, pourvu que les deux circonférences se coupent. A cet effet il faut que la distance des centres soit plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence, c'est-à-dire :



$$TF' < AB + TF$$

et

$$TF' > AB - TF.$$

Cette double condition est toujours satisfaite quand le point donné est extérieur à la courbe. Car alors dans le triangle TF′F, on a :

$$TF' < TF + FF',$$

et, à plus forte raison :

$$TF' < TF + AB.$$

La deuxième condition $TF' > AB - TF$ revient à celle-ci, en ajoutant TF aux deux membres :

$$TF' + TF > AB.$$

Or, si nous joignons ZF, le triangle TZF nous donne :

$$ZT + TF > ZF;$$

ajoutons de part et d'autre ZF′, il viendra :

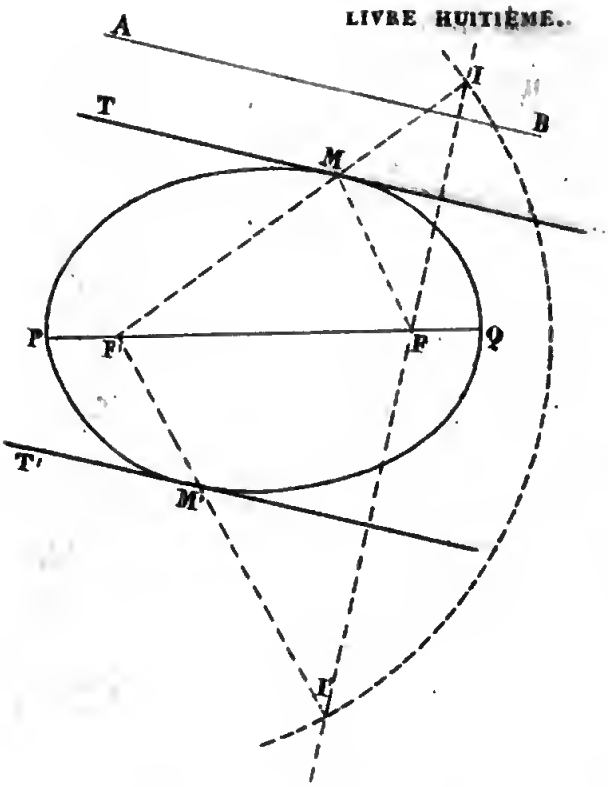
$$TF' + TF > F'Z + ZF;$$

or, $F'Z + ZF = AB$. Donc

$$TF' + TF > AB.$$

Problème 7. — *Mener une tangente à une ellipse parallèlement à une droite donnée.*

Analyse. — Soient AB la droite donnée, TM la tangente parallèle, joignons le point de contact M aux deux foyers F′, F, prolongeons F′M d'une grandeur égale à FM, joignons IF; la tangente TM est perpendiculaire au milieu de FI, et si nous prenons comme précédemment le point I pour inconnue, nous observerons que FI, perpendiculaire à TM,



le sera à sa parallèle AB. Donc le point I se trouvera sur cette perpendiculaire ; il est distant de l'autre foyer F' d'une grandeur F'I égale au grand axe PQ. Donc le point I se trouvera aussi sur la circonférence décrite du foyer F' avec PQ pour rayon.

Synthèse. — De l'un quelconque des foyers F abaissez une perpendiculaire indéfinie FI sur la droite AB. De l'autre foyer F' comme centre avec le grand axe pour rayon, décrivez une circonférence. Ses deux points d'intersection I et I' avec la droite étant joints au foyer F', donneront les points de contact de deux parallèles à AB qui répondront à la question.

Discussion. — Le rayon de la circonférence étant toujours plus grand que F'F, puisqu'il est égal au grand axe, celle-ci rencontrera toujours la perpendiculaire en deux points ; donc le problème est toujours possible*.

Problème 8. — *Mener une tangente faisant un angle donné avec une droite donnée.*

Faites une droite qui rencontre celle qui est donnée sous

* Les problèmes relatifs à la tangente nous seront utiles en géométrie descriptive pour les plans tangents à l'ellipsoïde de révolution.

l'angle donné, et menez une tangente parallèle à cette nouvelle droite.

Problème 9. — *Mener une normale à l'ellipse par un point donné sur son contour.*

Joignez le point aux deux foyers, et menez la bissectrice de l'angle des deux rayons vecteurs qui en résultent.

Exercice 1. — Dessiner une ellipse et mesurer sa surface.

Exercice 2. — Dessiner les projections de deux ellipsoïdes : l'un alongé, l'autre aplati. Mesurer leurs volumes. On se donnera pour chacun le plan de l'équateur parallèle au plan horizontal.

APPLICATIONS DE L'ELLIPSE ET DES ELLIPSOÏDES DE RÉVOLUTION.

L'ellipse est employée dans une foule de circonstances dans les arts. C'est une ovale qui est préférable aux courbes dites anses de panier et aux arcs rampants. On s'en sert dans le tracé des fenêtres dites *œils-de-bœuf;* dans le jardinage pour le tracé des parterres. Sa propriété d'être obtenue par la section d'un cylindre ou d'un cône circulaire par un plan, fait qu'on la rencontre souvent dans la coupe des pierres *. Les ellipsoïdes de révolution servent aussi de surfaces d'intrados dans les voûtes en dômes. Certains réflecteurs ont la forme d'un segment d'ellipsoïde alongé. Nous nous arrêterons sur quelques-unes de ces applications.

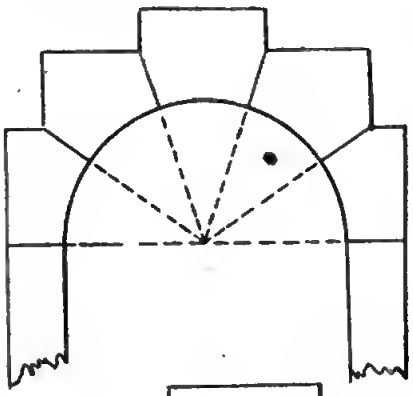
---

* C'est la forme de l'arête des voûtes d'arête barlongue et en arc de cloître, etc.

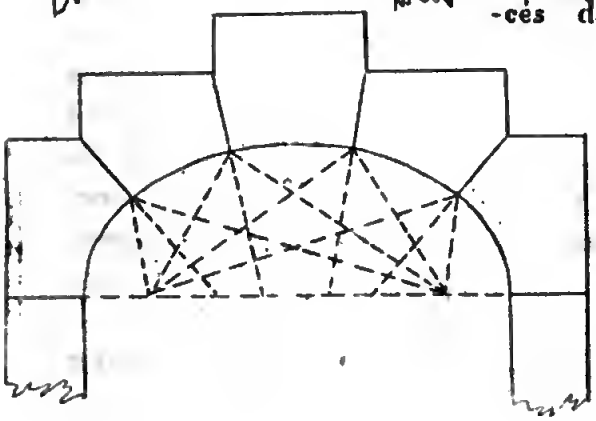
Application 1. — Berceaux et portes elliptiques.

On appelle *berceau cylindrique* une voûte en forme de cylindre, destinée à couvrir l'espace compris entre deux murs parallèles. Ce berceau est dit circulaire ou elliptique, suivant que sa directrice est un cercle ou une ellipse. Le plan de séparation des deux murs avec la voûte se nomme *plan de naissance*. La surface cylindrique formant l'intérieur de la voûte se nomme *l'intrados* ou *la douelle*, et la surface extérieure s'appelle *extrados*. On donne le nom de *cintre* à la directrice d'intrados ; chacune des pierres de la voûte se nomme *voussoir*. Celles qui s'appuient sur les murs sont les *coussinets*. Les faces suivant lesquelles se touchent les voussoirs s'appellent *joints*. Le cintre doit toujours être partagé en un nombre impair de parties autant que possible égales entre elles. Le voussoir du milieu se nomme *la clef*.

Lorsqu'un berceau a peu de largeur on lui donne le nom de *porte*.

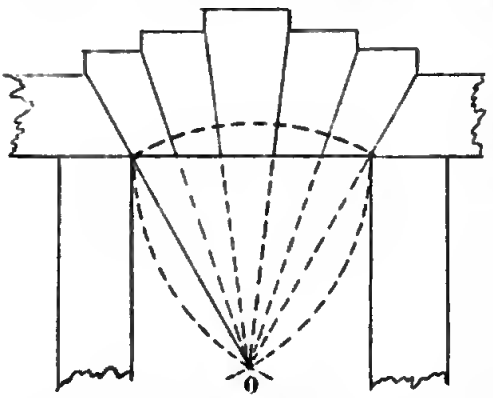


La théorie et l'expérience ont fait reconnaître que les plans de joints doivent être normaux à la surface d'intrados, c'est-à-dire être conduits par une génératrice du cylindre et une normale à la courbe directrice. Quand les portes ou berceaux sont percés dans la façade d'un monument, on doit tâcher de raccorder les joints ou coupes des voussoirs avec les lits ou joints horizontaux et verticaux du mur. On a représenté ici les élévations de deux

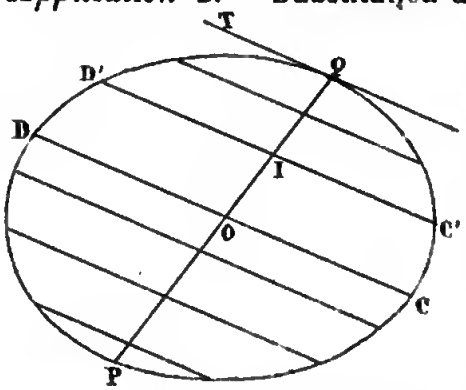


berceaux cylindriques, l'un circulaire, l'autre elliptique, avec les détails de l'appareil conforme aux prescriptions qui précèdent.

La voûte plate dite *plate bande* dont la surface d'intrados est un plan, fait exception. Car si on faisait les plans de joints normaux à la surface, ils seraient verticaux, et les voussoirs dits *claveaux* dans ce cas glisseraient sans obstacle. Alors on substitue aux joints verticaux des plans de joints, dont chacun est déterminé par une normale à un arc de cercle de 60°, limité aux arêtes des *sommiers* (pierres qui forment la partie supérieure des jambages ou *piédroits* et sur lesquelles s'appuie la plate-bande) et par une génératrice du cylindre dont cet arc serait la directrice. L'arc de 60° a pour centre le sommet O d'un triangle équilatéral qui a pour côté la distance des jambages.



Application 2. — Substitution de l'ellipse à l'arc rampant.



On démontre, par les propriétés projectives des figures, que le lieu géométrique des points milieux d'un système de cordes parallèles, telles que CD, C'D', etc., est un diamètre qui est dit *le conjugué* de celui qui fait partie du système. Ainsi PQ est le diamètre conjugué de CD. Réciproquement CD est le conjugué de PQ, c'est-à-dire qu'il divisera en deux parties égales les cordes parallèles à PQ.

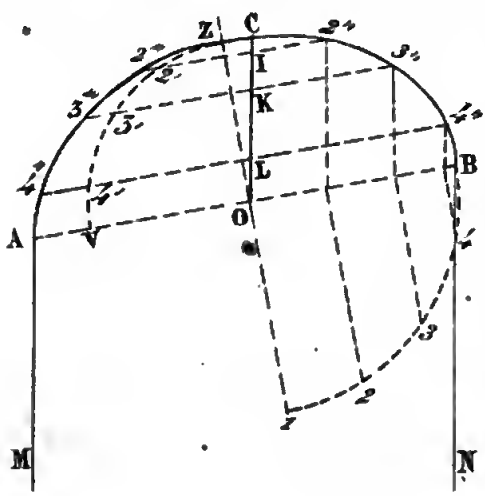
De là résulte qu'étant donné un diamètre CD, pour trouver

son conjugué, on mène à ce diamètre une parallèle C'D' limitée à l'ellipse, on en prend le milieu I et on le joint au centre de l'ellipse, PQ est le conjugué.

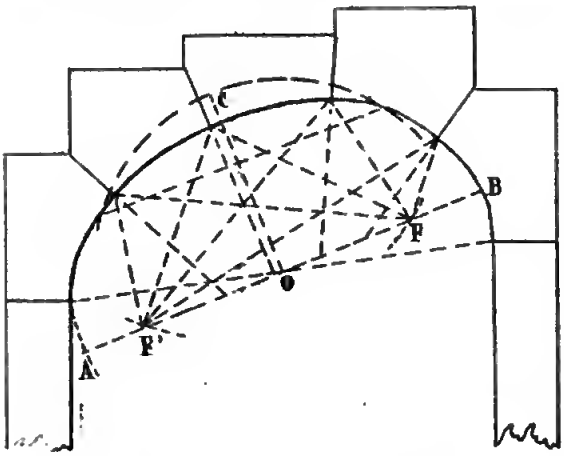
On démontre également que la tangente TQ en un point donné Q de l'ellipse est parallèle au conjugué CD du diamètre PQ qui passe par ce point, et réciproquement.

Cette dernière propriété permet de remplacer un arc rampant par une portion d'ellipse qu'on obtient par points, en considérant la moitié de la ligne de naissance OB et la flèche OC comme deux demi-diamètres conjugués. En effet les arêtes intérieures des piédroits étant parallèles à la flèche qui sert de diamètre conjugué à AB seront tangentes à la courbe.

Tracé par points de cette portion d'ellipse. — Au milieu O de la ligne de naissance, élevons une perpendiculaire indéfinie OZ. Par l'extrémité C de la flèche menons une parallèle CZ à AB. Du centre O avec OZ pour rayon, décrivons un quart de cercle limité à AB, et du même centre avec OB pour rayon, décrivons-en un autre limité au prolongement de OZ. Divisons chacun de ces quarts de cercle en autant de parties égales que nous voulons de points dans chacune des moitiés de notre demi-ellipse (en 4 par exemple). Numérotons ces points de division de 1 en B pour l'arc 1B, et de Z en V pour l'arc ZV. De chacun des points de division de l'arc 1B, abaissons des perpendiculaires sur OB, et de chacun de leurs pieds menons des parallèles à OC. De chacun des points de division de VZ, menons des parallèles à AB. Les points de rencontre de ces parallèles avec celles qu'on a menées à OC et qui correspondent aux numéros de même ordre, sont autant de points

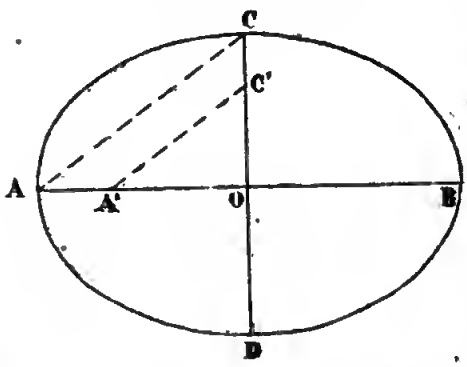


de l'ellipse ; on obtient ainsi : C, 2″, 3″, 4″. Pour obtenir ceux de la portion d'ellipse située au-dessus de AO, prolongeons en sens inverse et de quantités égales à elles-mêmes, les parallèles 12″, K3″, L4″. Les extrémités 2‴, 3‴, 4‴ seront les autres points cherchés.



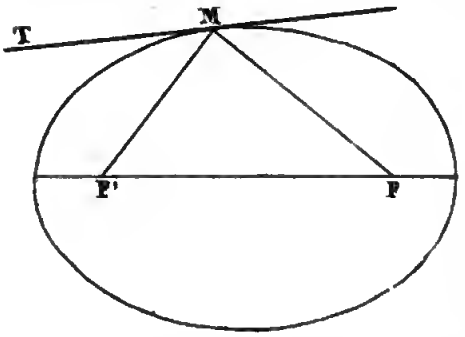
Si l'on voulait obtenir les normales qui déterminent les plans de joints, il faudrait chercher les axes par le moyen du problème 3, puis les foyers par le problème 2, enfin mener les bissectrices des angles des rayons vecteurs qui aboutissent aux points de division des voussoirs.

On pourrait être tenté de penser que, dans les applications 1 et 2, les extrémités des normales qui ont été prises égales pour déterminer les plans des joints, appartiendraient à une ellipse semblable à l'ellipse directrice d'intrados. Cela n'a pas lieu, car deux ellipses sont dites semblables lorsque leurs axes sont proportionnels, de sorte que l'ellipse ACBD étant donnée, pour déterminer le demi grand axe de sa semblable qui aurait pour demi petit axe C'O, il faut joindre AC, et par le point C' mener une parallèle à AC ; A'O sera le demi grand axe demandé à cause de la proportion CO : C'O :: AO : A'O. Or, pour que dans chacun des cas précités les deux courbes fussent semblables, il faudrait, qu'entre deux ellipses semblables, on ait la



relation $CC' = AA'$, ce qui ne peut avoir lieu à moins que $CO = AO$, et dans ce cas la courbe ACB serait une circonférence.

Application 3. — De la propriété de la tangente de faire des angles égaux avec les rayons vecteurs qui passent par le point de contact, il résulte une propriété physique de la surface ellipsoïdale alongée. Elle consiste en ce que tout corps chaud, lumineux ou sonore, placé à l'un des foyers F', enverra sur la surface des rayons qui seront tous réfléchis au foyer F, de sorte que ce foyer sera plus chauffé, ou plus éclairé, ou recevra plus de son que d'autres points plus voisins de F' que le point F.

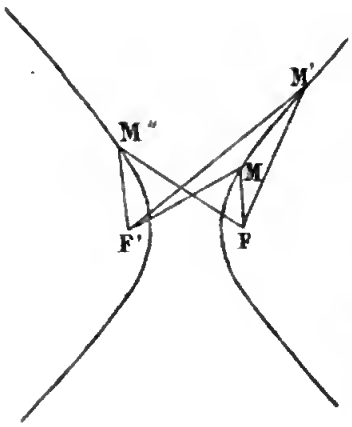


Les réflecteurs elliptiques ou portions d'ellipsoïde alongé limitées par un plan perpendiculaire à l'axe, sont donc les plus convenables pour concentrer la lumière en un point.

Application 4. — La sphère est la vraie forme des surfaces d'intrados des voûtes en dôme dites en plein cintre. Mais si la voûte doit être surbaissée ou surhaussée, on peut lui donner la forme de l'ellipsoïde aplati ou alongé. Dans tous les cas, les joints qui séparent une assise de voussoirs de la suivante sont des surfaces coniques tronquées, censées engendrées par le mouvement autour de l'axe, de la normale à l'ellipse génératrice en chacun des points de division qui indiquent la distribution des voussoirs. Quant aux joints qui séparent dans une même assise un voussoir du voisin, ce sont des plans obtenus par des méridiens.

Ce mode d'appareil est applicable à toutes les surfaces de révolution.

HYPERBOLE.

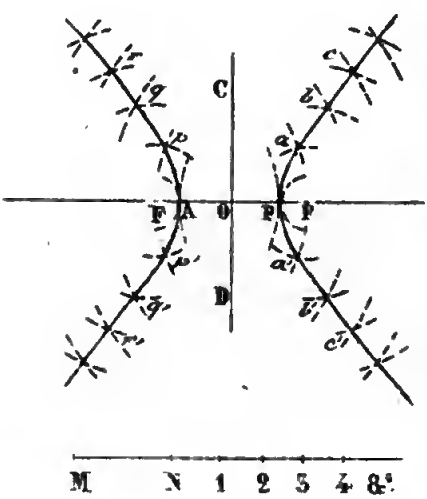


C'est une courbe telle, que la différence des distances de chacun de ses points à deux points fixes est constante et égale à une ligne donnée.

Elle a la forme de cette figure. Les deux points fixes ou *foyers* sont F', F. Ainsi on a : F'M-FM=F'M'-FM'=FM''-F'M''. Ces distances sont aussi désignées sous le nom de *rayons vecteurs*.

La courbe a deux branches qui s'étendent à l'infini, comme nous allons le voir.

Tracé de cette courbe par points. — Soient F et F' les deux foyers, MN la différence des rayons vecteurs supposée plus petite que F'F. Prolongeons MN indéfiniment et portons sur son prolongement, à partir du point N, des divisons N1, 1.2, etc., égales entre elles et arbitraires. De chacun des foyers F' et F avec la distance N1 décrivons des arcs de cercle. Des mêmes foyers avec la distance M1 décrivons d'autres arcs de cercle, ils coupent les premiers en *a*, *a'*; *p*, *p'*, qui sont évidemment quatre points de la courbe. Adoptons pour nou-



veaux rayons les distances successives N2, M2 ; N3, M3, etc., et opérons de même des foyers comme centres, nous aurons les points b, b'; q, q'; c, c'; r, r'; etc. Joignons tous ces points et nous aurons les deux branches figurées ici. Elles peuvent s'étendre indéfiniment, puisque les divisions N1, 1.2, etc., peuvent être portées indéfiniment sur MN prolongée.

Points remarquables de la courbe. — Les points A et B où la courbe coupe la droite F'F donnent aussi lieu à la relation FA—F'A=MN et F'B—FB=MN. Comme ces points sont sur la ligne des centres, les cercles qui les donnent sont tangents. Pour obtenir les rayons de ces circonférences tangentes, nous remarquerons d'abord qu'à cause de la symétrie des constructions F'A=FB. Donc FA—F'A=FA—FB ou AB. D'ailleurs FA—F'A=MN ; donc AB=MN. Ainsi F'A ou FB est la demi-différence entre F'F et MN ; par conséquent F'B ou FA est égale à cette même demi-différence augmentée de MN. Mais si nous observons que le milieu O de F'F est aussi celui de AB, il sera plus simple, pour obtenir les points A et B, de porter de chaque côté du point O la moitié de MN.

Discussion de la courbe. — Il faut, pour ce tracé, que les couples de circonférences décrites avec M1, N1 ; M2, N2 ; etc., pour rayons, se rencontrent ; c'est-à-dire que, pour les cercles autres que ceux des points A et B, la distance des centres F'F soit plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence. La première condition sera satisfaite pourvu que la distance du point N au premier point de division 1 soit plus grande que BF ou AF', car on a : F'B+BF=FF' ou 2BF+AB=FF' ou enfin 2BF+MN=FF'. Or, si N1 est plus grand que BF, on aura :

$$M1 + N1 \text{ ou } 2N1 + MN > F'F.$$

A plus forte raison la condition sera-t-elle satisfaite pour les rayons N2, M2 ; etc. La seconde condition est toujours satisfaite puisqu'en vertu des données F'F est plus grande que MN.

En vertu des mêmes raisonnements que pour l'ellipse, on

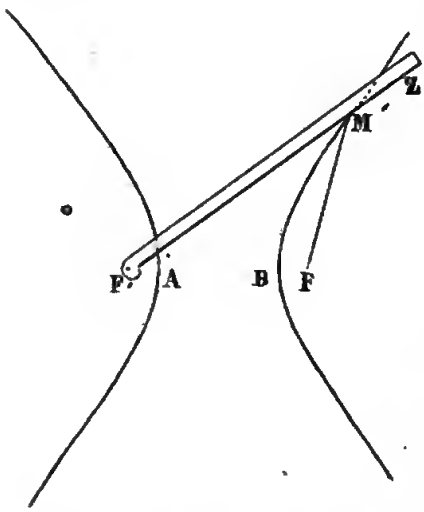
reconnaîtra que la courbe est symétrique par rapport à la droite F'F indéfinie, et aussi par rapport à la perpendiculaire élevée à AB par le point O. AB se nomme l'*axe transverse*, CD l'*axe illimité* ou *non transverse*, A et B sont les sommets de la courbe.

RÉSUMÉ.

1° *La distance de chacun des foyers au sommet de la branche correspondante est égale à la demi-différence entre la distance des foyers et la ligne qui exprime la différence des rayons vecteurs.*

2° *L'axe limité ou transverse est égal à la différence des rayons vecteurs.*

3° *L'hyperbole est partagée en quatre parties égales par chacun des axes.*



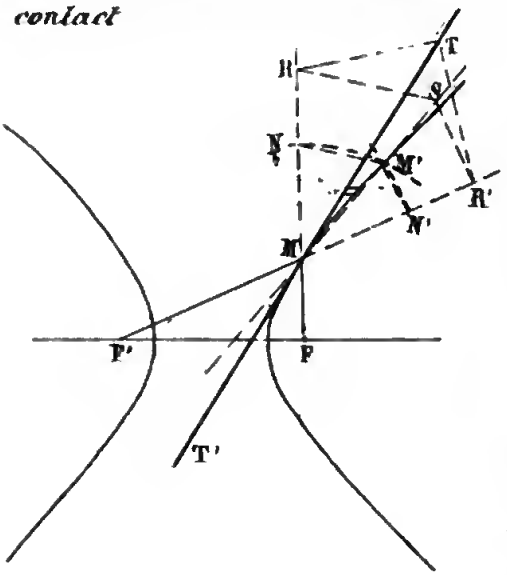
Tracé de l'hyperbole d'un mouvement continu. — On peut aussi obtenir une partie d'hyperbole au moyen d'une règle F'Z dont l'une des extrémités est percée d'un trou et dont l'autre est munie d'un fil. La longueur de ce fil doit être moindre que celle de la règle, d'une quantité égale à l'axe limité. On plante une fiche à l'un des foyers F', on la fait passer à travers le trou de l'une des extrémités de la règle, et on attache l'un des bouts du fil à une seconde fiche plantée à l'autre foyer F. On forme du fil une ligne brisée dont l'un des côtés ZM s'appuie toujours contre la règle, et dont le sommet variable M décrit la courbe au moyen d'un style qu'on y tient à la main.

THÉORÈME 1. — *Toute droite qui passe par le milieu de*

l'axe transverse et qui est limitée aux deux branches de la courbe, est un diamètre, c'est-à-dire est divisée en ce point en deux parties égales.

Même démonstration que pour l'ellipse. Le corollaire est également applicable à l'hyperbole.

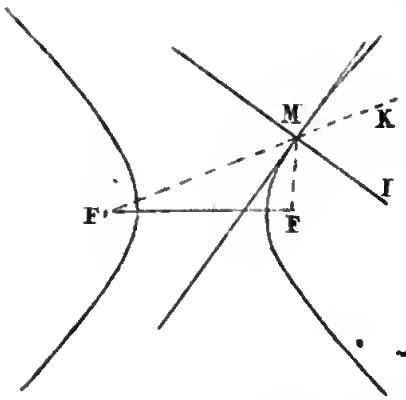
Théorème 2. — *La tangente à l'hyperbole est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs qui aboutissent au point de contact*



Considérons l'hyperbole dont F, F' sont les foyers, et M un point de la courbe ; pour avoir un second point M' prolongeons les deux rayons vecteurs FM et F'M de grandeurs égales MN, MN', puis des centres F et F' décrivons les arcs N'M', NM' ; leur point d'intersection M' sera évidemment un point de la courbe : car la différence des nouveaux rayons vecteurs est restée la même. Menons la sécante MM'. Tout point S pris sur cette sécante jouit de la propriété suivante : Si l'on mène SR, SR' parallèles aux cordes M'N, M'N', on aura MR = MR'. Cela se démontre comme pour l'ellipse. Quand la sécante devient tangente, on démontre aussi de la même manière que les triangles TRM, TR'M sont égaux, et que, par conséquent, MT est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs.

Corollaire 1. — *La tangente fait des angles égaux avec l'un des rayons vecteurs qui passe par le point de contact et le prolongement de l'autre.*

TMR' = FMT'.



Corollaire 2. — La normale à l'hyperbole est bissectrice du supplément de l'angle des rayons vecteurs qui passent par son pied.

Ainsi les angles FMI et IMK sont égaux.

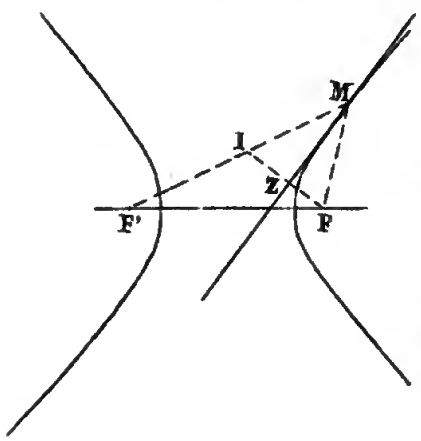
PROBLÈMES SUR L'HYPERBOLE.

Problème 1. — *Dessiner par points une hyperbole dont on donne la distance des foyers égale à* 2^m, *et la différence des rayons vecteurs égale à* $1^m,30$ (consultez le tracé de cette courbe, page 364).

Problème 2. — *Trouver les axes d'une hyperbole dont on n'a que le contour et le centre.*

Même procédé que pour l'ellipse.

Problème 3. — *Mener une tangente à l'hyperbole par un point donné sur la courbe.*

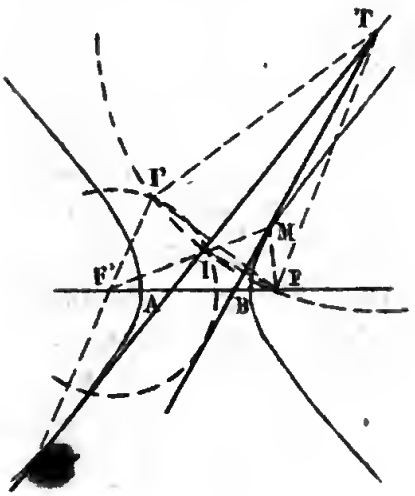


Analyse. — Nous avons vu que la tangente en un point donné de l'hyperbole est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs.

Synthèse. — Joignez le point de contact M aux deux foyers F', F ; portez le plus petit rayon vecteur de M en I. Joignez IF, prenez-en le milieu Z et joignez-le

au point M ; ZM sera la tangente. Car il est évident, par ce tracé, qu'elle est la bissectrice de l'angle F'MF.

Problème 4. — *Mener une tangente à l'hyperbole par un point extérieur.*

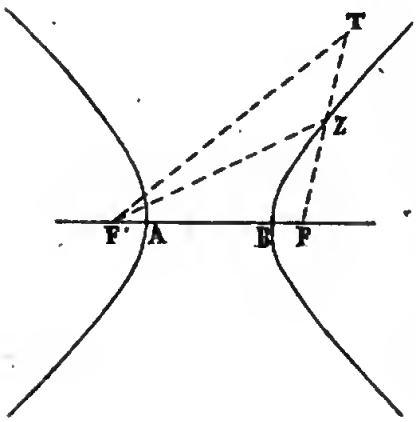


Analyse. — Soient T le point donné et M le point de contact ; faisons ici la même construction que dans le problème précédent. Au lieu de prendre le point M pour inconnue, prenons le point I, et remarquons que F'I étant la différence des rayons vecteurs, nous aurons un premier lieu géométrique de ce point, en décrivant du foyer F' un arc de cercle avec la différence des rayons vecteurs ou l'axe limité. Joignons le point donné T aux deux points I et F, on aura évidemment TI = TF. Or, la distance TF est connue ; donc en décrivant une autre circonférence du point donné avec sa distance à l'autre foyer pour rayon, nous aurons un second lieu géométrique du point I. Il sera donc donné par l'intersection des deux circonférences.

Synthèse. — De l'un quelconque des foyers F avec l'axe limité pour rayon, décrivez une circonférence. Du point donné T avec sa distance à l'autre foyer F, décrivez-en une autre ; joignez les deux points d'intersection I, I' au foyer F'. Les points de rencontre M, M' des droites IF', I'F' avec la courbe ou avec les perpendiculaires TM au milieu de IF, TM' au milieu de I'F, donnent lieu aux deux tangentes TM, TM'.

Discussion. — Observons que pour ce tracé, la distance des foyers, l'axe limité et le point donné sont les seuls

éléments dont nous nous sommes servi et que, par conséquent, le contour de la courbe n'est pas indispensable pour résoudre le problème. Cette observation est importante pour un problème de géométrie descriptive qui nécessite le tracé précédent.



Pour que le problème ait deux solutions, il faut que les deux circonférences se coupent, c'est-à-dire que la ligne des centres F'T soit plus petite que la somme des rayons AB+TF, et plus grande que leur différence AB — FT. Cette double condition est toujours satisfaite quand le point donné T est extérieur à la courbe. En effet, menons TF', TF, F'Z, nous aurons

$$F'Z - ZF = AB.$$

Le triangle TF'Z nous donne :

$$F'T < F'Z + ZT;$$

retranchons des deux membres TF ou TZ + ZF, il vient : $F'T - TF < F'Z + ZT - TZ - ZF$ ou $F'T - TF < F'Z - ZF$: remplaçant F'Z — ZF par AB, on obtient :

$$F'T - TF < AB,$$

et en ajoutant TF aux deux membres :

$$F'T < AB + TF.$$

C'est la première condition. La seconde est également satisfaite, car le triangle F'TF donne :

$$F'T > F'F - FT,$$

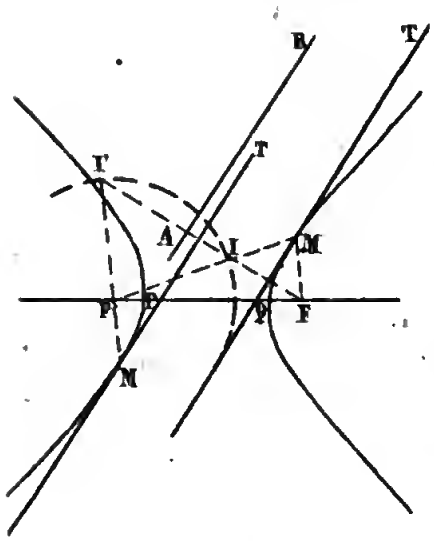
et à plus forte raison :

$$F'T > AB - FT$$

(voyez dans les applications un moyen de reconnaître dans quel cas les tangentes appartiendront aux deux branches de la courbe ou à une seule).

Problème 5. — *Mener une tangente à une hyperbole parallèlement à une droite donnée.*

Analyse. — En raisonnant par analogie avec l'ellipse, on trouvera la marche suivante :



Synthèse. — De l'un quelconque des foyers F abaissez une perpendiculaire indéfinie FI sur la droite AB. De l'autre foyer F' comme centre avec l'axe limité pour rayon, décrivez une circonférence. Ses deux points d'intersection I et I' avec la droite étant joints au foyer F', donnent, par leurs rencontres M, M' avec la courbe, les points de contact des deux parallèles à AB, qui sont MT, M'T', et qui répondent à la question.

Discussion. — Le problème n'est possible qu'autant que la circonférence coupe la perpendiculaire FI ou lui est tangente ; et dans ce dernier cas, il n'a qu'une solution.

Problème 6. — *Mener une tangente faisant un angle donné avec une droite donnée.*

Marche analogue à celle de l'ellipse.

Problème 7. — *Mener une normale à l'hyperbole par un point donné sur son contour.*

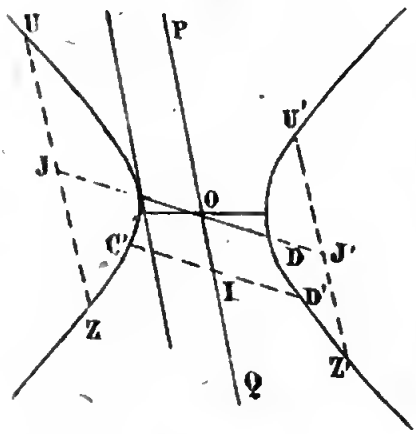
Joignez le point aux deux foyers et menez la bissectrice du supplément de l'angle des rayons vecteurs *.

---

* Les problèmes relatifs à la tangente nous serviront en géométrie descriptive pour les plans tangents à l'hyperboloïde de révolution.

APPLICATIONS DE L'HYPERBOLE ET DES HYPERBOLOÏDES DE RÉVOLUTION.

Les applications de l'hyperbole sont moins nombreuses que celles de l'ellipse. Cependant sa propriété d'être obtenue par la section d'un cône à deux nappes par un plan, la fait ranger dans le groupe inséparable des trois sections coniques : ellipse, hyperbole, parabole. On la rencontre aussi dans la coupe des pierres.

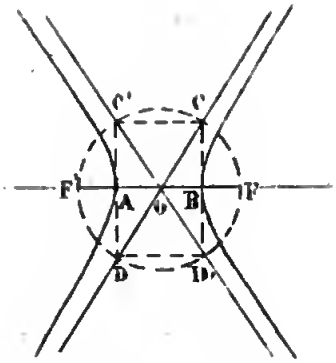


Dans l'hyperbole comme dans l'ellipse, le lieu géométrique des points milieux d'un système de cordes parallèles CD, C'D', etc., est un diamètre, qui est *le conjugué* de celui qui fait partie du système des cordes. PQ est le conjugué de CD, et réciproquement. La parallèle à PQ, menée par le point C, est tangente à la courbe. D'après cela, étant donné un diamètre CD, pour trouver son conjugué, on mène à ce diamètre une parallèle C'D', limitée à l'hyperbole ; on en prend le milieu I et on le joint au centre de l'hyperbole. Si l'un de ces diamètres CD est transverse, l'autre PQ est non transverse, et réciproquement.

Si PQ était donné, la parallèle aurait la disposition ZU et JJ' serait celle du diamètre conjugué.

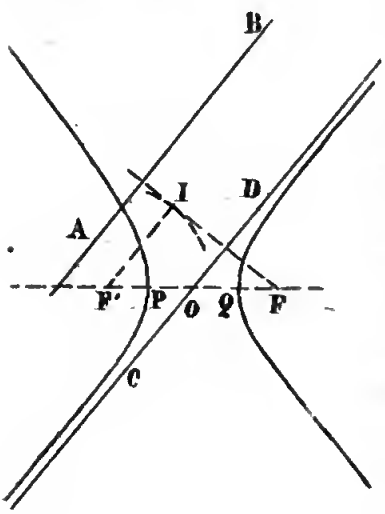
Cette propriété permet de trouver le centre d'une hyperbole dont on n'a que le contour. Car on n'a qu'à mener des cordes parallèles UZ, U'Z' dans l'une des branches ou dans l'une et l'autre, joindre leurs points milieux J, J', on aura le conjugué transverse, son milieu O sera le centre.

Ce qu'on vient de dire en dernier lieu est aussi applicable à l'ellipse.



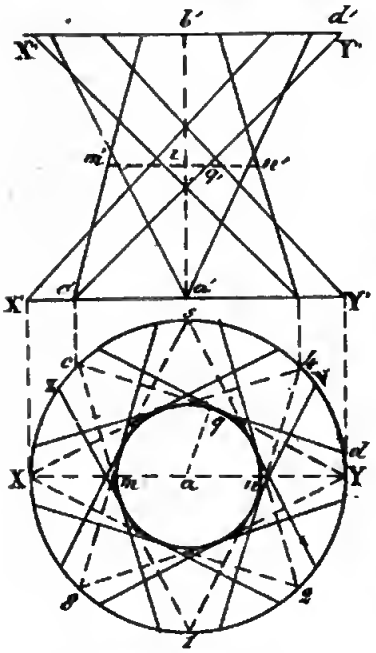
Si le diamètre CD fait avec l'axe limité un angle de plus en plus grand, son conjugué PQ fera avec lui un angle de plus en plus petit. Enfin quand le diamètre CD atteint l'inclinaison de la diagonale du rectangle D'CC'D inscrit dans le cercle qui a pour rayon OF, et dont les côtés parallèles sont tangents aux sommets, son conjugué se confond avec lui. Dans cette position limite, CD est *asymptote* de la courbe, c'est-à-dire tangente à l'infini et se rapprochant de plus en plus de cette courbe sans la rencontrer. Il y en a une autre symétrique C'D' donnée par la seconde diagonale. Si le rectangle CD'DC' est un carré, l'hyperbole est dite *équilatère*. Cette propiété des asymptotes d'être les diagonales du rectangle CD'DC, permet de trouver les sommets de la courbe quand on connaît les asymptotes et les foyers, et réciproquement de trouver les foyers quand on connaît les asymptotes et les sommets.

Dans le problème de la tangente par un point extérieur, on reconnaît que les tangentes appartiennent à la même branche si le point donné est dans l'angle C'OD ou COD', et qu'elles appartiennent à des branches différentes si le point est donné dans l'un des angles supplémentaires de C'OD ou COD'.



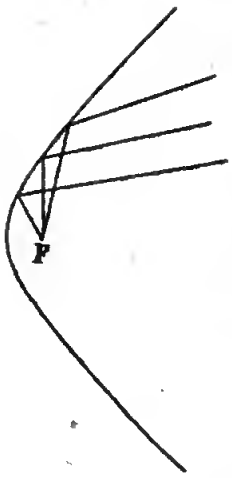
Dans le problème 5, nous avons dit que, quand le cercle F'I est tangent à la perpendiculaire abaissée du point F sur AB, il n'y a qu'une tangente ; elle est alors asymptote et il faut la mener par le centre O de la courbe parallèlement à AB.

Application 1. — Si une des branches de l'hyperbole tourne autour de son axe illimité, le solide qui en résulte se nomme *hyperboloïde à une nappe*. On peut aussi l'obtenir en faisant tourner autour de l'axe une droite non située dans le même plan. Ex. $a'b'$, a, projections de l'axe ; cd, $c'd'$, projections de la droite mobile ; aq, iq' celles de leur perpendiculaire commune qui engendre le cercle mn, $m'n'$, dit *cercle de gorge*. XY, X'Y', X''Y'', celles des cercles de bases que nous supposons égaux. 1, 2, Y, 4, 5, c, X, 8, pieds des diverses génératrices toutes tangentes en projection horizontale au cercle de gorge. Il y en a de deux ordres ; celles qui ont la direction 1Z ou cd et celles qui ont la direction 1V et qui sont symétriques des premières par rapport au méridien qui passe par leur pied commun. Les projections verticales se déduisent facilement.



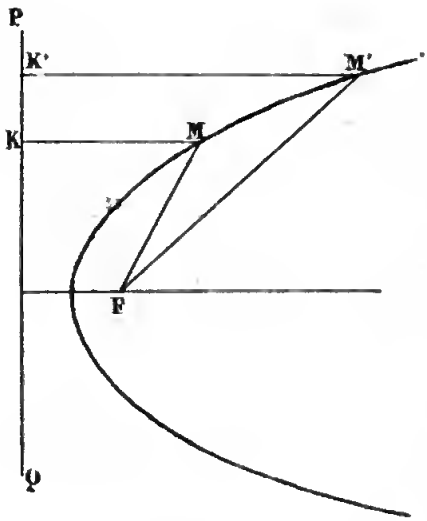
Ce genre d'hyperboloïde sert de corbeille. Sa forme gracieuse le rend utile dans beaucoup de circonstances. La propriété du cercle de gorge de varier de grandeur suivant l'inclinaison des génératrices sur le plan de base, l'a fait adopter pour dévidoir. Pour faire varier cette inclinaison, on relie les extrémités des génératrices par des tringles à un manchon fixe qui enveloppe l'axe, et à un autre mobile qui glisse le long de ce dernier et peut s'y fixer au moyen d'une vis de pression.

Application 2. — Si l'hyperbole tourne autour de son axe transverse, elle décrit un hyperboloïde à deux nappes. Si l'on considère l'une d'elles, et si on la coupe par différents méridiens, la section sera une hyperbole égale à la généra-



trice. Or, tout corps chaud, lumineux ou sonore, placé au foyer, enverra des rayons qui se réfléchiront sur la surface suivant les prolongements des rayons vecteurs accouplés de ceux-ci, à cause de la propriété physique déjà mentionnée dans l'ellipsoïde; et comme ils sont divergents, il résulte que ce genre d'hyperboloïde est la véritable forme à adopter pour les réflecteurs qui doivent répandre, sur une surface à chauffer ou à éclairer, des rayons divergents. Cette forme pourrait donc convenir aux cheminées des appartements et aux reverbères des angles de rues.

PARABOLE.



C'est une courbe telle, que les distances de chacun de ses points à un point fixe et à une droite donnée sont égales.

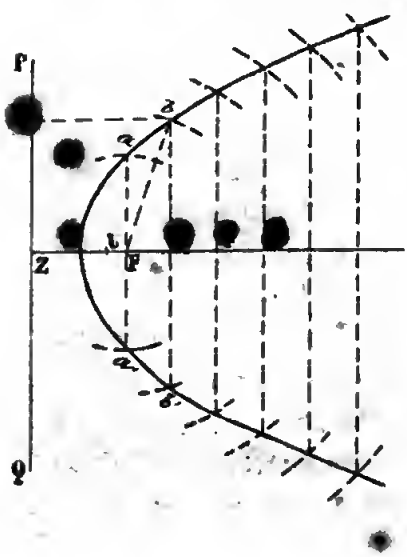
Elle a la forme de cette figure. Le point fixe est *le foyer*. La droite donnée PQ se nomme *la directrice*. Ainsi on a :

$$FM = MK, \quad FM' = M'K'.$$

Ces distances sont *les rayons vecteurs*.

La courbe s'étend à l'infini.

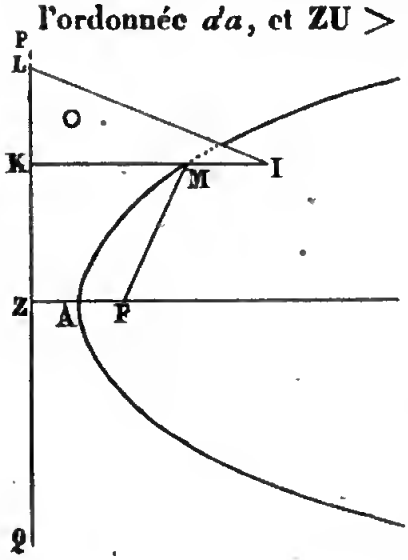
Tracé de cette courbe par points. — Soient F le foyer et PQ la directrice. Du foyer F, j'abaisse une perpendiculaire FZ sur la directrice et je la prolonge indéfiniment en sens inverse, je porte sur ZF, à partir du point Z, des divisions égales et arbitraires Z1, 1F, F3, 3.4, etc., puis du foyer F comme centre avec chacune des distances des points de division à la directrice, je décris des arcs de cercle. Les points de rencontre de chacun d'eux avec les perpendiculaires élevées à la droite ZF au point de division correspondant, donnent des points de la courbe. Joignons tous ces points par une ligne continue, et nous aurons une



partie de la parabole. Elle peut s'étendre indéfiniment, puisque les divisions peuvent être portées indéfiniment sur la perpendiculaire ZF prolongée. Il est évident que cette construction donne des points de la courbe. Car on a, par exemple, F*b*=Z3, et comme Z3=*b*K, il en résulte F*b*=*b*K.

Points remarquables de la courbe. — Dans la figure précédente, nous avons pris pour division la moitié de FZ. Le point où la courbe coupe la perpendiculaire ZF est le milieu de la distance ZF. Ce point est le sommet de la courbe. Les points *a* et *a'*, qui correspondent à l'ordonnée du foyer, sont distants de son pied F d'une quantité égale à FZ. La corde *aa'* se nomme le *paramètre* de la parabole; d'où cette relation : *La distance du foyer de la parabole à la directrice est égale au demi-paramètre, et la distance de son sommet à la même directrice est égale au quart du paramètre.*

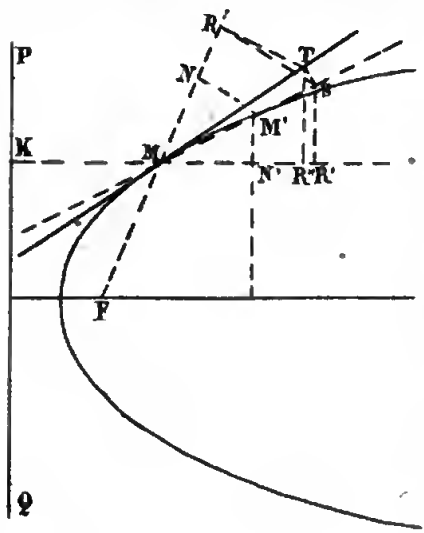
Discussion de la courbe. — Il faut, pour le succès de ce tracé, que les circonférences F*b*, etc., rencontrent les ordonnées correspondantes *bb'*, etc.; c'est-à-dire que le rayon de chacune d'elles soit plus grand que la distance du foyer à l'ordonnée, condition qui est toujours satisfaite, car on a évidemment : Z3 > F3 pour les points situés à droite de l'ordonnée *da*, et ZU > UF pour ceux qui sont situés à la gauche. La courbe est symétrique par rapport à l'axe ZF en vertu de raisonnements analogues à ceux de l'ellipse.



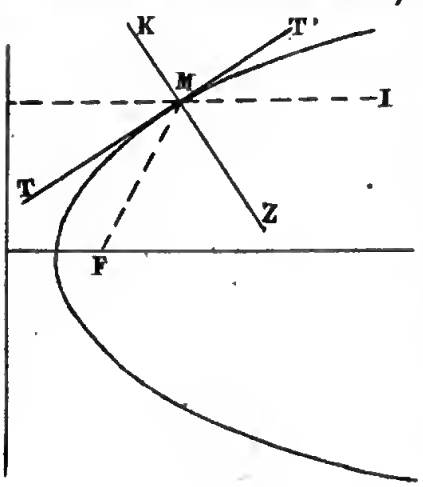
Tracé de la parabole d'un mouvement continu. — Prenez une équerre LKI; fixez un fil à l'extrémité I de l'un des côtés de l'angle droit; prenez ce fil égal en longueur au côté KI, fixez-en l'extrémité libre au foyer F; appliquez l'angle droit de l'équerre sur la directrice,

d'abord de manière que le fil soit tendu, puis faites glisser l'équerre le long de la directrice et un style le long du côté IK de manière que le fil primitif forme une ligne brisée IMF. Ce style dessinera la parabole. Car si le fil était égal à KI, dans la position figurée, il en reste évidemment MF = KM.

THÉORÈME 1. — *La tangente à la parabole est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs.*



Considérons la parabole dont F est le foyer, PQ la directrice et M un point de la courbe. Pour avoir un second point M', prolongeons les deux rayons vecteurs FM, KM de grandeurs égales MN et MN'; leur point d'intersection M' donnera ce second point; car il y a encore égalité entre les nouveaux rayons vecteurs. Menons la sécante MM'. Tout point S pris sur cette sécante jouit de la propriété suivante : Si l'on mène SR, SR' parallèles à la corde M'N et à l'ordonnée M'N', on aura : MR = MR'; quand la sécante devient tangente, les triangles TRM, TR'M sont égaux en vertu de raisonnements analogues à ceux de l'ellipse. Donc MT est bissectrice de l'angle NMN' ou de KMF son opposé par le sommet.



Corollaire 1.— La tangente fait des angles égaux avec l'un des rayons vecteurs et le prolongement de l'autre.

TMF = IMT'.

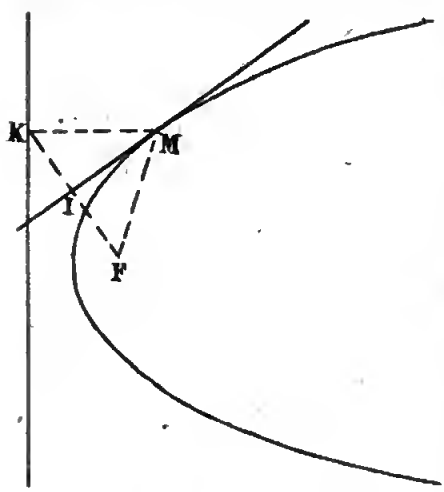
Corollaire 2. — La normale à la parabole est bissectrice du supplément de l'angle des rayons vecteurs.

FMZ = ZMI.

PROBLÈMES SUR LA PARABOLE.

Problème 1. — *Dessiner par points une parabole dont on donne la directrice et sa distance au foyer égale à* $0^m,60$ (consultez le tracé, page 376).

Problème 2. — *Mener une tangente à la parabole par un point donné sur la courbe.*

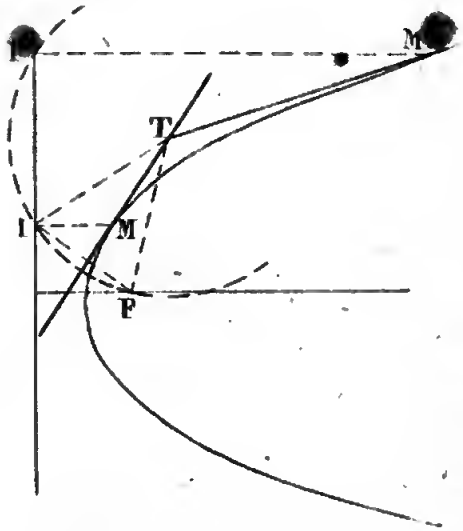


Analyse. — La tangente est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs.

Synthèse. — Menez les rayons vecteurs MF, MK du point de contact, joignez leurs pieds F, K, prenez le milieu de la distance KF et joignez-le au point donné. IM sera la tangente. Car le triangle KMF est isocèle, et la droite qui joint le sommet au milieu de la base est bissectrice de l'angle au sommet.

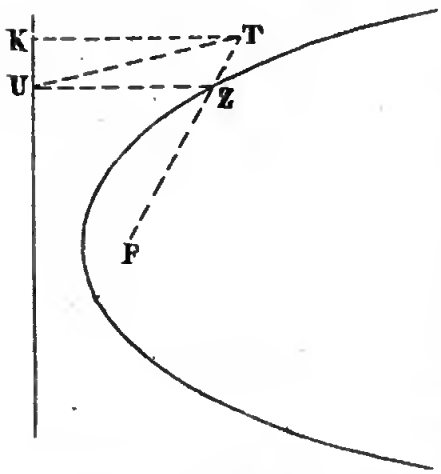
Problème 3. — *Mener une tangente à la parabole par un point extérieur.*

Analyse. — Soient T le point donné et M le point de contact. Faisons ici les constructions du problème précédent et prenons le point I pour inconnue. Car s'il était connu,



en menant la parallèle IM à l'axe, on aurait le point M. Joignons le point donné aux deux points I et F, on aura évidemment : TI = TF. Or, la distance TF est connue ; donc en décrivant une circonférence du point donné comme centre avec sa distance au foyer pour rayon, on aura un premier lieu géométrique du point I. Il est aussi situé sur la directrice, donc il sera à l'intersection de celle-ci avec la circonférence.

Synthèse. — Du point donné avec sa distance au foyer décrivez une circonférence. Elle coupera généralement la directrice en deux points I et I'. Par chacun d'eux menez une parallèle à l'axe, les points de rencontre M et M' de ces parallèles avec la courbe donneront les points de contact des tangentes MT, M'T.



Discussion. — Le problème n'a deux solutions qu'autant que la circonférence coupe la directrice. A cet effet il faut que la distance TF soit plus grande que la perpendiculaire TK, ce qui a toujours lieu quand le point donné est hors de la courbe. Car en abaissant du point Z une perpendiculaire ZU sur la directrice et joignant TU, on a :

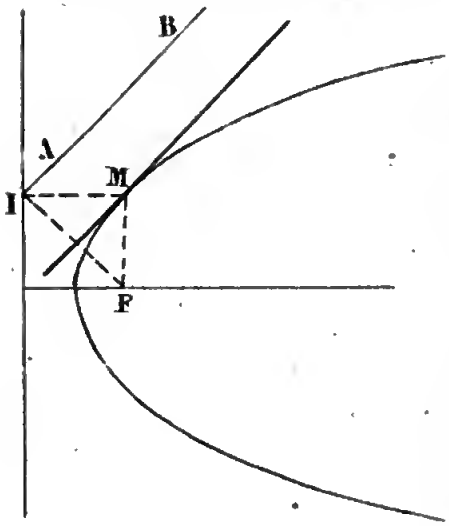
$$KT < TU ;$$

mais $TU < TZ + ZU$, et comme $ZU = ZF$, on a :

$$TU < TZ + ZF \quad \text{ou} \quad < TF ;$$

donc à plus forte raison $TK < TF$.

Problème 4. — *Mener à la parabole une tangente parallèle à une droite donnée.*



Analyse.—Soient AB la droite donnée et MT la tangente demandée. La perpendiculaire FI à cette tangente sera aussi perpendiculaire à AB. Donc on aura un premier lieu géométrique du point I en abaissant une perpendiculaire du foyer sur la droite donnée. Comme la directrice doit aussi contenir ce point I, il se trouvera à leur rencontre. La parallèle IM à l'axe, donnera alors le point de contact.

Synthèse.— Abaissez du foyer une perpendiculaire FI sur la droite donnée, et par son intersection avec la directrice menez une parallèle à l'axe, son point de rencontre M avec la courbe donnera le point de contact.

Discussion. — Il est évident que le problème n'est possible qu'à la condition que FA rencontre AB ; cela aura toujours lieu à moins que la droite donnée ne soit parallèle à l'axe.

Problème 5. — *Mener à une parabole une tangente qui fasse avec une droite donnée un angle donné.*

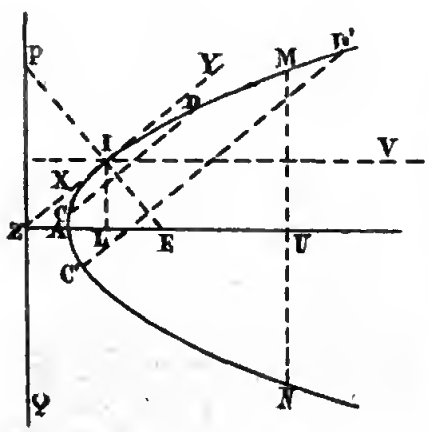
Procédé analogue à celui de l'ellipse.

Problème 6. — *Mener une normale à une parabole par un point donné sur la courbe.*

Menez la bissectrice du supplément de l'angle des rayons vecteurs.

APPLICATIONS DE LA PARABOLE ET DU PARABOLOÏDE DE RÉVOLUTION.

La parabole se rencontre souvent dans les arts. C'est la courbe des chaînes des ponts suspendus dont les travées sont soutenues par des tringles verticales. Elle peut servir de courbe directrice pour les voûtes dites *berceaux cylindriques surhaussés*. Tout corps lancé obliquement dans l'air et abandonné à l'action de la pesanteur, suivrait un chemin en forme de parabole sans la résistance de l'air qui altère la forme de cette courbe : on la nomme alors *trajectoire*. Toute pièce encastrée par un bout dans un mur et à l'autre bout de laquelle on exerce un effort de flexion, doit être cylindrique et avoir une parabole pour section par un plan perpendiculaire à celui du mur, pour que cette pièce n'ait pas plus de tendance à se rompre dans un endroit que dans l'autre. La parabole est aussi utile dans le raccordement des routes. Le paraboloïde de révolution sert de réflecteur lorsqu'on veut que les rayons réfléchis soient parallèles à l'axe.



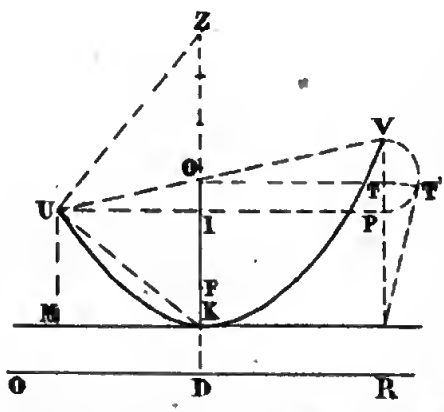
Souvent on n'a qu'une partie de cette courbe, et pour certaines applications il est utile d'avoir le sommet et la directrice. A cet effet nous observerons que *le lieu géométrique des points milieux d'un système de cordes parallèles* CD, CD' *etc., est une droite infinie parallèle à l'axe*. Donc pour avoir la direction de l'axe, il faut tracer deux cordes parallèles CD, CD', joindre leurs points milieux. La perpendiculaire MN

à cette nouvelle droite, est aussi perpendiculaire à l'axe qui la divise en deux parties égales. Si nous en prenons le milieu U, la parallèle UA à IV nous donnera l'axe et le sommet A. La parallèle XY aux cordes CD, C'D', menée par l'extrémité I est tangente ; sa perpendiculaire IP est donc normale. *La droite* LE *qu'on appelle sous-normale est égale au demi-paramètre.* En prenant la moitié de cette droite et la portant de A en Z sur le prolongement de l'axe, on aura donc le pied de la directrice. Portant cette même moitié dans le sens inverse et à partir du même point, on aura le foyer.

Pour évaluer le volume d'un prisme d'égale résistance dans toute l'étendue de sa section, il est indispensable de savoir évaluer la surface de base. Si le segment de parabole qui forme cette base est limité par une corde perpendiculaire à l'axe, ce qui a lieu ordinairement, *la surface est égale aux deux tiers de celle d'un rectangle qui aurait pour base l'abscisse de cette corde, et pour hauteur cette corde.*

Application 1. — Tracé de la parabole des ponts suspendus.

Les données sont : la tangente MN au sommet, les hauteurs MU, NV des points de suspension U, V.

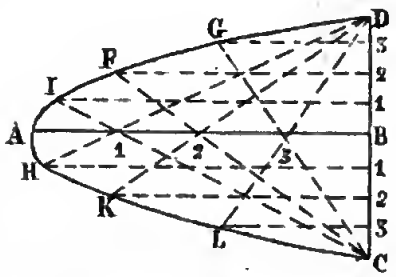


La parabole jouit de la propriété suivante : *Toute corde coupe son axe en un point dont la distance au sommet est moyenne proportionnelle aux distances des deux points d'intersection de la corde avec la courbe, à la tangente au sommet.* Alors pour trouver l'axe, il faut porter la distance UM sur VN, décrire sur la différence VP une demi-circonférence et lui mener une tangente NT par le point N. NT sera la moyenne, rabattons-la sur NV et par l'extrémité T' de son rabattement, menons une parallèle à MN. Son point de rencontre O avec UV appartiendra à l'axe OK.

Pour trouver la directrice et le foyer, nous nous appuierons sur cet autre principe : *La tangente au sommet étant prise pour axe des ordonnées, et l'axe pour axe des abscisses, toute ordonnée de la parabole est moyenne proportionnelle entre son abscisse et le paramètre.* Observons que UI est l'ordonnée du point U, KI son abscisse. Joignons donc KU et en U élevons la perpendiculaire UZ à UK. Alors IZ sera le paramètre. Car on a évidemment dans le triangle rectangle KUZ : KI : IU :: IU : IZ. Prenons le quart de IZ et portons sa longueur au-dessus et au-dessous du sommet K, nous aurons le foyer F et le pied D de la directrice QR.

Application 2. — Tracé de la parabole du balancier d'une machine à vapeur.

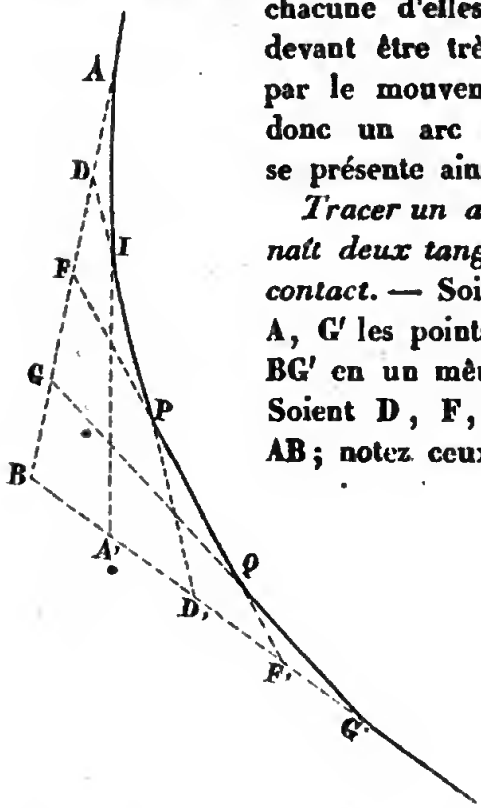
Le balancier d'une machine à vapeur doit résister à la flexion que tendent à produire sur l'un de ses bras la tige du piston et son attirail, et sur l'autre la bielle du volant. Pour que celui-ci n'ait pas plus de tendance à se rompre en un endroit qu'en un autre, on lui donne la forme d'un cylindre droit ayant pour base deux segments égaux de parabole réunis par la corde perpendiculaire à l'axe. On construit ordinairement l'un de ces segments par points. L'axe AB étant donné, la corde CD est déterminée par le calcul de la résistance des matériaux.



On partage chacune des moitiés de CD en un nombre arbitraire de parties égales, l'axe AB en un même nombre de parties égales. On les numérote comme l'indique la figure. On joint les extrémités C et D à tous les points de division de l'axe, et on limite ces droites aux parallèles à l'axe, menées par les points de division correspondants de CD, on obtient ainsi les points de la courbe DGFIAHKLC. Les correspondants de l'autre segment s'obtiendraient en prolongeant les parallèles en sens inverse, de grandeurs égales à elles-mêmes.

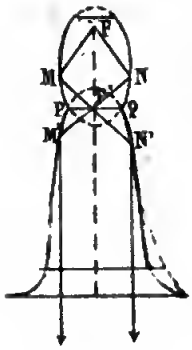
Application 3. — Tracé de la courbe de raccordement des routes.

La courbe de raccordement la plus naturelle serait une circonférence tangente aux deux droites qui déterminent les directions des routes à raccorder en un point donné sur chacune d'elles. Mais le rayon de ce cercle devant être très-grand, on ne peut le tracer par le mouvement continu. On y substitue donc un arc de parabole, et le problème se présente ainsi :



Tracer un arc de parabole dont on connaît deux tangentes et les deux points de contact. — Soient AB, BG' les deux droites; A, G' les points de contact. Partagez AB et BG' en un même nombre de parties égales. Soient D, F, G les points de division de AB; notez ceux de BG' comme l'indique la figure; joignez les points de même notation; la ligne brisée AIPQG' a pour côtés des tangentes à la parabole; mais comme la parabole se confond sensiblement avec cette ligne brisée, on l'adopte au lieu de la parabole.

Application 4. — De ce que, dans la parabole, la tangente fasse des angles égaux avec l'un des rayons vecteurs et le prolongement de l'autre, il résulte que tout corps chaud, lumineux ou sonore, placé au foyer d'un paraboloïde de révolution, enverra des rayons qui seront réfléchis parallèlement à l'axe. Le segment de paraboloïde obtenu par un plan perpendiculaire à l'axe est donc la forme qu'il faut adopter pour les réflecteurs destinés à donner un faisceau de rayons parallèles de lumière, comme dans les filatures où l'on veut éclairer les métiers dits *mull-jenny*.

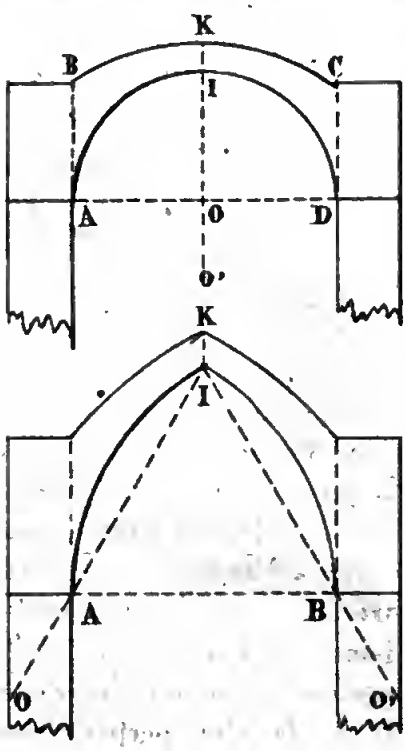


Les porte-voix ont aussi la forme d'un segment de paraboloïde évasé vers ses bords. Mais il vaut mieux former les porte-voix d'un ellipsoïde alongé et d'un paraboloïde qui se coupent suivant un parallèle PQ passant par leur foyer commun F'. De cette manière, tous les sons émis en F sont réfléchis en F', continuent leur direction et se réfléchissent dans le paraboloïde parallèlement à l'axe.

DES COURBES D'EXTRADOS DES VOUTES.

Plusieurs géomètres qui se sont occupés de la manière dont les voussoirs agissent pour se soutenir mutuellement, ont démontré que, pour qu'une voûte se soutienne d'elle-même, il faut que les poids des voussoirs soient entre eux comme les différences des tangentes des angles formés par les plans de joints. Ainsi le procédé que nous avons exposé précédemment ne doit être adopté qu'autant que la voûte est faite dans un massif de maçonnerie qui résiste à la poussée.

Pour satisfaire à la condition que nous venons de formuler, d'une manière approximative et suffisante dans la pratique, nous considérerons comme Rondelet les trois cas suivants :

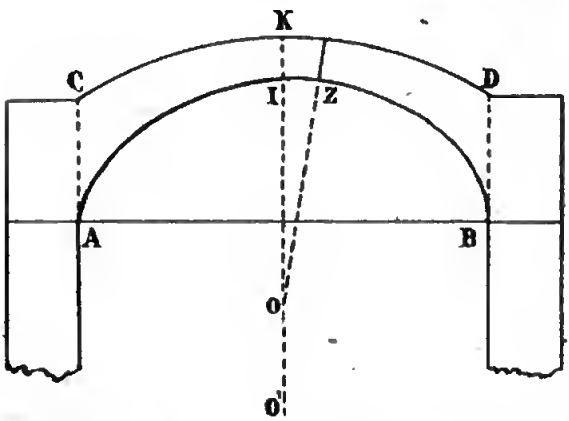


1° *Voûte circulaire.*—Après avoir déterminé les épaisseurs des piédroits et de la clef, prolongez le rayon d'intrados IO d'une grandeur OO' égale à sa moitié, puis décrivez du point O' comme centre avec sa distance au point K qui limite l'épaisseur de la clef, un arc de cercle BC qui vient se terminer aux intersections B et C avec les arêtes intérieures prolongées des piédroits.

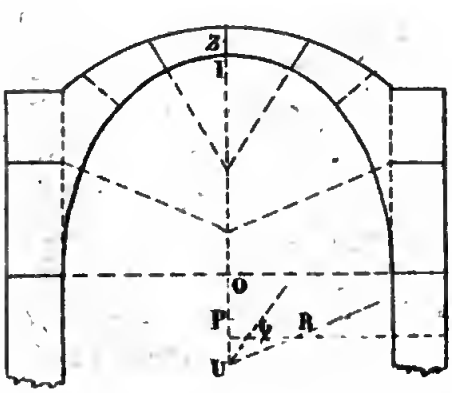
2° *Voûte gothique en tiers point.* — La courbe d'intrados est obtenue par deux arcs de

cercle de 60° chacun, décrits de chacune des extrémités de la ligne de naissance comme centre avec cette ligne pour rayon. Après s'être fourni les mêmes données que précédemment, on prolonge les rayons AI, IB d'une grandeur égale à leur moitié, puis des points O et O′ comme centres avec OK, O′K pour rayons, on décrit les arcs qu'on limite comme précédemment.

3° *Voûte elliptique surbaissée ou surhaussée.* — Nous prenons pour exemple l'ellipse surbaissée, le procédé étant le même pour l'ellipse surhaussée. Après s'être muni des données analogues au cas précédent, on marque la demi-largeur IZ de douelle de la clef, on mène la normale à l'ellipse, et on cherche sa rencontre O avec l'axe IO; on prolonge IO d'une grandeur OO′ égale à sa moitié, et du point O′ comme centre avec sa distance au point culminant de la clef, on décrit l'arc CD.



Voici du reste le procédé général conforme au principe énoncé plus haut.



Nous l'appliquons à une courbe quelconque.

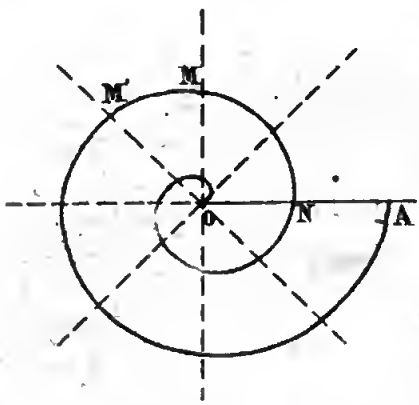
Nous nous donnons l'épaisseur de la clef et celle des piédroits, nous menons les normales des joints; d'un point quelconque U de l'axe OI nous menons des parallèles à ces normales. Nous portons la demi-épaisseur IZ de la clef perpendicu-

lairement à l'axe, de manière qu'elle soit comprise entre cet axe et la parallèle UQ au premier joint. Soit PQ sa position, nous prolongeons PQ indéfiniment, et les segments QR, etc., compris entre deux concourantes consécutives nous donnent les épaisseurs au milieu des voussoirs successifs en partant de la clef.

En appliquant ce tracé à la parabole, on trouverait que les épaisseurs vont contrairement à ce qui a lieu dans les exemples précédents, en diminuant de la clef aux piédroits.

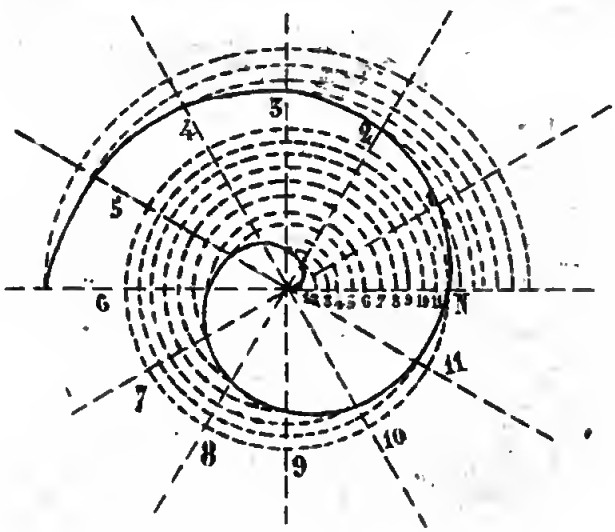
SPIRALE D'ARCHIMÈDE.

C'est une courbe engendrée par un point mobile sur une droite, et qui y parcourt des longueurs égales pendant que la droite décrit des angles égaux.



Soit OA la position de la droite quand le point décrivant est en O. Les longueurs OM, OM' du rayon vecteur sont proportionnelles aux angles AOM, AOM' ou aux arcs qui leur servent de mesure. De là une construction facile de la courbe quand on connaît la longueur ON parcourue par le point décrivant, pendant une révolution entière de la droite mobile.

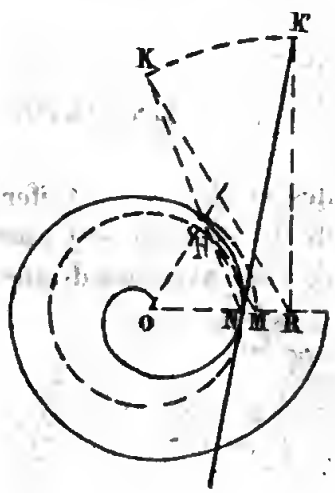
Tracé de cette courbe. — Soit donc ON cette donnée.



Décrivons une circonférence avec cette grandeur comme rayon. Partageons-la en un certain nombre de parties égales, 12 par exemple. Partageons en un même nombre de parties égales le rayon ON. Numérotons les points de division de la circonférence et du rayon, comme l'indique la figure. Puis du point O comme centre avec les distances successives O1, O2, etc., décrivons des arcs de cercle, et limitons-les aux rayons successifs O1, O2, etc., du cercle ON. Joignons par une courbe les extrémités de ces arcs, nous aurons la portion de spirale comprise depuis l'origine O jusqu'au point N, et appelée la première *spire*. Pour avoir la seconde, portons sur le prolongement de ON des divisions égales aux premières, numérotons-les de la même manière, et décrivons du centre O avec les distances de ce point à chacun des nouveaux points de division des arcs de cercle, limitons-les aux rayons de même ordre.

Si on voulait que la spirale eût un filet, il faudrait se donner la largeur de ce filet à partir du point N en dedans ou en dehors de la circonférence ON, et adopter pour circonférence régulatrice de la nouvelle spirale la distance du centre O à l'extrémité de la droite qui fixe la largeur du filet.

Problème. — *Mener une tangente à une spirale d'Archimède par un point donné sur la courbe.*



Analyse. — Soit N le point de contact donné. Pour avoir un second point de la courbe voisin du premier, il faut prolonger ON d'une certaine fraction NM de sa grandeur ($\frac{1}{6}$ par exemple), et décrire du centre O avec OM pour rayon un arc de cercle MN', égal à la même fraction $\frac{1}{6}$ de la circonférence entière. Menons les sécantes NN', MN', et d'un point quelconque K de la première, menons une parallèle

KR à la seconde N'M ; il est évident que quel que soit ce point, on aura : N'M : NM :: KR : NR. Or, si le point N' se rapproche du point N, la sécante N'N s'approche de devenir tangente et la proportion précédente ne cesse pas d'avoir lieu. Mais la corde N'M du cercle s'approche de devenir perpendiculaire à OM, sa parallèle KR aussi. Si l'arc N'M est infiniment petit, sa corde N'M lui est égale ; alors le rapport de N'M à NM est celui d'une fraction de la circonférence ON à une fraction égale du rayon ON ; le rapport de KR à NR est donc le même. D'ailleurs le point K peut être fort éloigné du point N ; la droite NR sera donc par rapport au rayon ON aussi grande qu'on voudra, et KR s'en déduira.

Synthèse. — Du centre O avec sa distance au point de contact, décrivez une circonférence. Prolongez le rayon ON de sa moitié par exemple, soit R l'extrémité de ce prolongement ; élevez en ce point à OR une perpendiculaire égale à la moitié de la circonférence ON et joignez son extrémité K' au point N ; cette droite sera la tangente demandée. On peut prolonger ON de toute autre grandeur que sa moitié et prendre RK' dans le même rapport avec la circonférence ON.

Le tracé de la normale nécessite d'abord celui de la tangente.

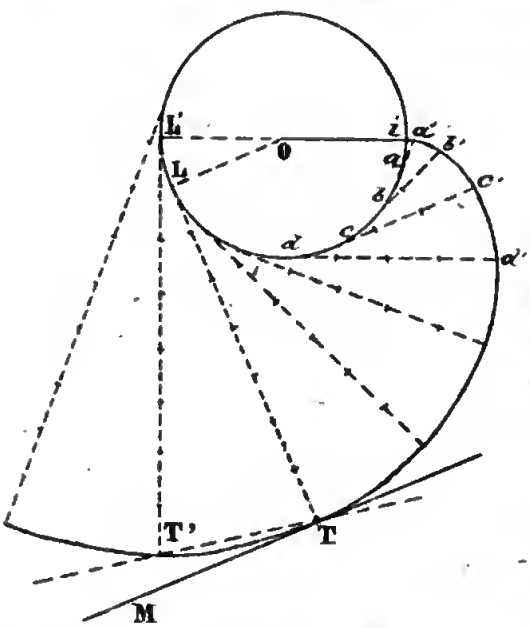
APPLICATION DE LA SPIRALE D'ARCHIMÈDE.

Son tracé est utile pour les volutes et doit être préféré aux arcs qui se raccordent. Celui de la tangente est aussi utile quand les volutes doivent se raccorder avec des droites.

DE LA DÉVELOPPANTE.

On appelle développante *d'une courbe le lieu géométrique des extrémités des tangentes menées aux divers points de cette courbe, et dont les longueurs sont prises égales au développement de la portion de courbe comprise depuis un point donné appelé l'origine jusqu'au point de contact de chacune d'elles.*

La plus utile des développantes est celle du cercle.



Tracé de cette courbe par points. — Soit iO le rayon ; prenons sur la circonférence à partir du point i considéré comme origine, une suite de points a, b, c, d, etc., équidistants et assez rapprochés pour que les arcs ia, ab, bc, cd, etc., se confondent sensiblement avec leurs cordes. Menons des tangentes au cercle en chacun de ces points, et prenons sur elles des longueurs aa', bb', cc', dd', etc., respectivement égales aux arcs correspondants ai, ib, ic, id, etc. Joignons les extrémités i, a', b', c', d', etc., par une courbe continue. Ce sera la développante du cercle. Il est évident que cette courbe s'étend à l'infini.

Tracé de la courbe d'un mouvement continu. — Enroulez un fil autour d'une circonférence de manière à l'embrasser

une ou plusieurs fois. Développez ensuite ce fil en tenant un style à l'extrémité mobile, il engendrera la développante.

Problème. — *Mener une tangente à la développante du cercle par un point donné sur la courbe.*

Analyse. — Soit T le point de contact donné. Menons la tangente TL au cercle. Considérons un point voisin T' et la tangente T'L' partant de ce point. Joignons au centre O les deux points de contact L, L' de ces deux tangentes. Menons la sécante T'T. L'élément de cercle LL' peut être considéré comme rectiligne formant le prolongement de LT. Alors les deux triangles T'L'T et L'OL seront semblables. Car ils sont tous deux isocèles puisque L'T' est égal à LT augmenté du développement de LL' ou en tout à L'T, que L'O et LO sont deux rayons : les angles L'OL et T'L'T sont égaux comme ayant les côtés perpendiculaires. Or, quand le point L' se rapproche de L, le point T' se rapproche de T et la sécante s'approche d'être tangente sans que les triangles dont il vient d'être question cessent d'être semblables. Alors l'angle L'LO et par conséquent son égal T'TL s'approchent d'un droit. Donc la tangente en T est perpendiculaire à TL.

Synthèse. — Menez, du point donné T, une tangente au cercle dont la courbe proposée est la développante, et élevez-lui en ce point une perpendiculaire qui sera la tangente demandée.

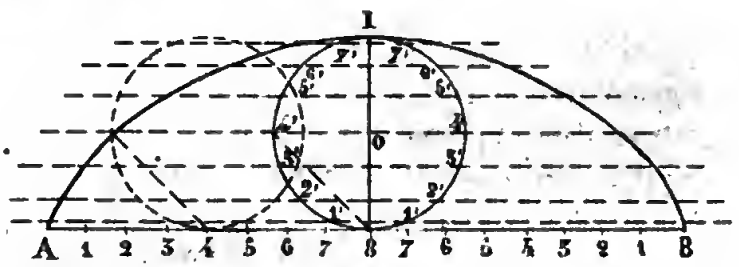
Scholie. — La normale en un point donné serait par conséquent la tangente menée de ce point à la circonférence dont la courbe proposée est la développante. Cette propriété est générale et s'applique à toutes les développantes autres que celle du cercle. La courbe dont la développante est donnée est donc le lieu géométrique des intersections des normales à celle-ci. C'est pour cette raison qu'on la nomme *la développée* de la courbe donnée.

DE LA CYCLOÏDE.

On appelle cycloïde *la courbe qu'engendre un point d'une circonférence en roulant sur une droite qui lui est tangente.* Ainsi un des clous d'une roue de voiture en mouvement sur un chemin horizontal engendre une *cycloïde.*

La circonférence est *la génératrice* du mouvement et la tangente en est *la directrice.*

Quoique cette courbe puisse s'étendre indéfiniment tant qu'a lieu le mouvement du cercle, on comprend que si nous prenons pour origine le point de contact, la courbe décrite pendant le temps nécessaire à la circonférence pour se développer tout entière sur la directrice, se reproduira périodiquement. Nous ne considérons que cette portion.



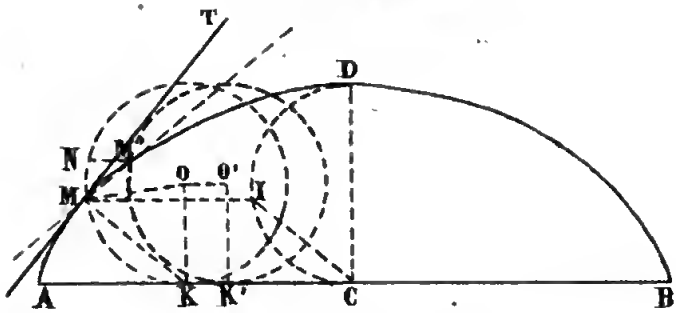
Tracé de cette courbe par points. — Soient OI le rayon de la circonférence génératrice et AB la directrice indéfinie. Nous obtiendrons le développement de la génératrice sur AB en divisant chaque demi-circonférence en un assez grand nombre de parties égales pour que l'arc résultant de cette division se confonde sensiblement avec sa corde (en 8, par ex.), et portant cette corde du point de contact 8 en A et en B autant de fois qu'il y a de divisions. Numérotons les points de division de la circonférence et ceux qui s'en déduisent sur AB comme l'indique la figure. Par chacun de ceux de

la demi-circonférence, menons des parallèles à AB. Puis du premier point de division de A8 comme centre avec la corde 8.1′ pour rayon décrivons un arc de cercle; son point d'intersection avec la parallèle 1′.1′ donnera un point de la courbe. Du point 2 comme centre avec la corde 8.2′ pour rayon décrivons un second arc de cercle; son intersection avec la parallèle 2′.2′ donnera un second point de la courbe, et ainsi de suite. Quand nous en sommes au point 7, par exemple, de la partie 8B de la directrice, nous prenons pour rayon la corde 8.7′ de la seconde demi-circonférence, et cherchons la rencontre de l'arc avec la parallèle 7′.7′. Comme cette corde est égale à celle de même notation de la première demi-circonférence, et que le centre 7 est symétrique du centre 7 de la partie A8, par rapport au diamètre 8I, il est évident que le point d'intersection avec 7′.7′ est symétrique du premier par rapport à ce même diamètre, et qu'il en est de même des autres; de là un moyen fort simple d'obtenir les points de la seconde partie de la courbe quand on a ceux de la première. Il consiste à porter à droite de l'axe 8I les distances des points de la première partie de la courbe à cet axe.

Pour concevoir l'exactitude de ce tracé, supposons que A soit l'origine de la courbe, c'est-à-dire le point de contact de la génératrice dans sa première position et qu'elle ait roulé de sorte que son nouveau point de contact soit en 4, par exemple. Alors le point décrivant est distant du point 4 d'une grandeur curviligne comptée sur l'arc, égale à A4, ou d'une grandeur rectiligne égale à la corde qui sous-tend cet arc, c'est-à-dire 8.4′; on aura donc le point décrivant de la circonférence tangente en 4, en menant la parallèle 4′.4′ et décrivant du point 4 comme centre avec 8.4′ pour rayon un arc de cercle dont on cherchera le point de rencontre avec la parallèle.

Problème. — *Mener une tangente à la cycloïde par un point donné sur la courbe.*

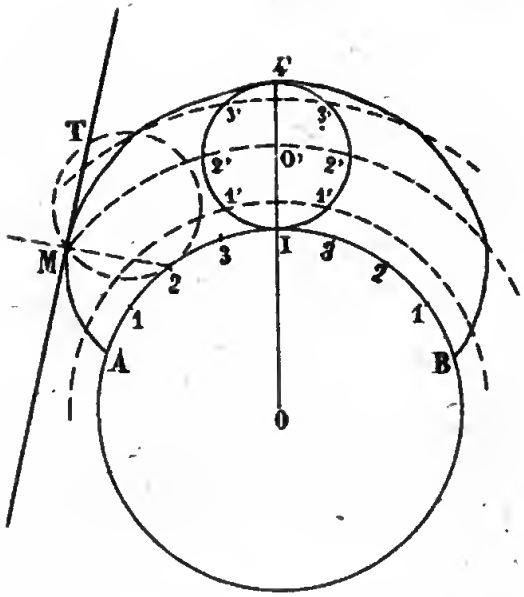
Analyse. — Soit M le point de contact donné. Considérons un point voisin M′ et menons la sécante MM′. Soient OK, O′K′



les positions des rayons de la circonférence génératrice quand elle passe par les points M, M'. Nous aurons alors : AK = arc MK et AK' = arc M'K'. Menons la parallèle M'N à AB. Alors l'arc M'K' peut être remplacé par l'arc NK, d'où AK' = arc NK et par suite AK' — AK ou KK' = arc NK — arc MK ou MN. Il est facile de faire voir qu'on a aussi NM' = KK'. Donc MN = NM' et le triangle NMM' est isocèle. Or, au fur et à mesure que le point M' s'approche du point M, le point N s'en approche aussi et l'arc MN ou sa corde tend à se confondre avec la tangente en M à la circonférence MO ; donc l'angle NMO s'approche d'être droit. Dans les triangles isocèles NMM' et MOK, les côtés MN, MO sont donc sensiblement perpendiculaires ; il en est de même de NM' et OK ; donc l'angle NMM' est égal à l'angle OKM ou à OMK. (Ils ne sauraient être supplémentaires parce qu'alors l'un d'eux serait obtus, ce qui est impossible pour un des angles à la base d'un triangle isocèle.) On aura donc : NMM' + M'MO = OMK + M'MO et comme NMM' + M'MO ou NMO vaut sensiblement un droit, OMK + M'MO ou M'MK vaut aussi un droit. Donc MM' est sensiblement perpendiculaire à MK ; d'où l'on conclut que la tangente est perpendiculaire à MK.

Synthèse. — Au point donné M menez une parallèle à la directrice AB jusqu'à sa rencontre I avec la demi-circonférence CD qui a pour diamètre le petit axe CD ; joignez IC, sa parallèle MK donnera la droite à laquelle la tangente doit être perpendiculaire. La normale sera évidemment MK.

DE L'ÉPICYCLOÏDE.



On appelle épicycloïde *la courbe qu'engendre un point d'une circonférence en roulant sur une autre circonférence qui lui est tangente et qui reste fixe.*

La circonférence mobile est *la génératrice* de la courbe et la circonférence fixe en est *la directrice*. Si la circonférence mobile est tangente intérieurement, l'épicycloïde est dite *interne;* si elle l'est extérieurement, l'épicycloïde est dite *externe*. C'est cette dernière qui est figurée ici et la seule dont nous nous occuperons.

Nous ne considérerons que la branche d'épicycloïde qui correspond au développement d'une circonférence; celle qui correspond à un second et troisième, etc., développement, lui sera égale. Il est d'ailleurs évident que si le rayon de la directrice est multiple du rayon de la génératrice, il en sera de même des circonférences, et que la circonférence directrice sera entourée d'un nombre exact de branches d'épicycloïdes.

Tracé de cette courbe par points. — Soient OI, O'I le rayon de la directrice et celui de la génératrice. Nous aurons le développement de la génératrice sur la circonférence OI en divisant chaque demi-circonférence de la première en un

assez grand nombre de parties égales, pour que l'arc résultant de cette division se confonde sensiblement avec sa corde (en 4, par ex.), et en portant cette corde du point de contact I en A et en B autant de fois qu'il y a de divisions. Numérotons les points de division de la génératrice et ceux qui s'en déduisent sur la directrice comme l'indique la figure. Du centre O avec chacune des distances de ce point aux points de division de la génératrice, décrivons des circonférences concentriques ; puis du premier point de division de AB comme centre avec la corde I1′ pour rayon, décrivons un arc de cercle ; son point d'intersection avec l'arc indéfini 1′.1′ donnera un point de la courbe. Du point 2 comme centre avec la corde I2′ pour rayon, décrivons un second arc de cercle ; son intersection avec l'arc indéfini 2′.2′ donnera un second point de la courbe, et ainsi de suite. Quand nous en sommes au point 3, par exemple, de la partie IB de la directrice, nous prenons pour rayon la corde I3′ de la seconde demi-circonférence, et nous cherchons la rencontre de l'arc avec celui qui passe par 3′.3′. Comme cette corde est égale à celle de même notation de la première demi-circonférence et que son centre 3 est symétrique du centre 3 de la partie AI par rapport au diamètre 4′I, il est évident que son point d'intersection avec l'arc 3′.3′ est symétrique du premier par rapport à ce diamètre, et qu'il en est de même des autres. De là un moyen fort simple d'obtenir les points de la seconde partie de la courbe quand on a ceux de la première. Il consiste à porter à droite de l'axe 4′I les distances des points de la première partie de la courbe à cet axe.

Pour concevoir la théorie de ce tracé, supposons que A soit l'origine de la courbe, c'est-à-dire le point de contact de la génératrice dans sa première position, et qu'elle ait roulé de sorte que son nouveau point de contact soit en 2, par exemple. Alors le point décrivant est distant du point 2 d'une grandeur curviligne comptée sur l'arc de la génératrice égale à l'arc A2 de la directrice, ou d'une grandeur rectiligne

égale à la corde qui sous-tend un arc égal I2′ de la génératrice. On aura donc le point décrivant de la circonférence tangente en 2 en traçant du point O comme centre avec O2′ pour rayon un arc de cercle indéfini, et du point 2 comme centre avec la corde I2′ pour rayon un autre arc de cercle, puis cherchant leur point de rencontre M.

Problème. — *Mener une tangente à l'épicycloïde par un point donné sur la courbe.*

Analyse. — Un raisonnement analogue à celui du même problème relatif à la cycloïde, nous amenerait à conclure que la tangente au point donné M est perpendiculaire à la corde M2 de la circonférence génératrice qui passe par le point donné M.

Synthèse. — Du point O comme centre avec OM pour rayon décrivez un arc de cercle indéfini M2′, joignez le point I au point d'intersection 2′ de cet arc avec la circonférence O′, puis du point M comme centre avec cette corde 2′I pour rayon décrivez un arc de cercle ; son intersection 2 avec la directrice donnera la normale 2M à laquelle la tangente demandée MT est perpendiculaire.

APPLICATION.

Les trois courbes que nous venons de décrire nous seront utiles en mécanique pour le tracé des engrenages. Nous verrons en effet que les dents doivent affecter telle ou telle des formes de ces courbes suivant le mode de communication de mouvement.

FIN DU COURS DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

666586

TABLE DES MATIÈRES.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

	Pages.
Définitions. — Mesure des droites et des angles.....	1 à 11

LIVRE PREMIER.

Propriétés des angles.....	11 à 14
Des triangles.....	14 à 20
De la perpendiculaire et des obliques.....	20 à 23
Triangles rectangles.....	23 et 24
Théorie des parallèles.....	24 à 34
Quadrilatères.....	34 à 41
Des polygones en général.....	41 et 42
Exercices sur le premier livre.....	42 à 46
Problèmes sur le premier livre.....	46 à 55

LIVRE DEUXIÈME.

Propriétés des cercles.....	55 à 63
Mesure des angles inscrits, etc.....	63 à 68
Théorie des contacts et des intersections de deux cercles	68 à 72
Exercices sur le deuxième livre.....	72 et 73
Problèmes du deuxième livre.....	74 à 90
Problèmes fondés sur les raccordements des cercles....	90 à 95
Quelques moulures d'architecture.....	95 à 97
Parallélogramme de Watt.....	97 et 98

LIVRE TROISIÈME.

Théorie de la racine quarrée.....	99 à 103

Théorie des proportions..... 103 à 109
Mesure de la surface des rectangles, carrés, parallélogrammes, triangles et trapèzes..... 109 à 114
Carrés faits sur la somme ou la différence de deux lignes 115 et 116
Propriétés du triangle rectangle et des triangles obliquangles..... 117 à 122
Proportionnalité des droites..... 122 à 125
Similitude des triangles et des polygones..... 125 à 132
Proportionnalité des cordes qui se coupent dans le cercle ou hors du cercle..... 134 à 136
Exercices sur le troisième livre..... 136 à 138
Problèmes du troisième livre..... 139 à 155

Applications.

De l'échelle des parties..... 155 à 157
Ornements des coupoles..... 157 et 158
Volute ionique..... 158 à 161
Arpentage et mesurage des surfaces planes..... 161 à 166
Partage des terrains..... 166 à 171

LIVRE QUATRIÈME.

Des polygones réguliers, de la mesure de la circonférence et de la surface du cercle..... 171 à 184
Polygones étoilés..... 184 à 188
Exercices sur le quatrième livre..... 188 à 190
Problèmes du quatrième livre..... 190 à 201

Applications.

De la volute des limons d'escalier..... 202 et 203
Tirer à huit pans une pièce équarrie..... 203 à 205
Des rapports des vitesses des roues d'engrenage..... 205
Du carrelage et du parquetage..... 205 à 210
Du mesurage de divers segments de cercle..... 210 et 211
De la table des cordes..... 212 et 213

LIVRE CINQUIÈME.

Des plans, de la perpendiculaire et des obliques..... 215 à 222
Du parallélisme des plans et des droites..... 222 à 225

Des angles d'une droite et d'un plan, de deux plans entre eux..... 225 à 229
Des angles polyèdres..... 229 à 234
Problèmes du cinquième livre..... 234 à 238

Applications.

Du dessin des corps par projections..... 238 à 244

LIVRE SIXIÈME.

Des différentes espèces de surfaces..... 245 et 246
Surfaces pyramidales et coniques..... 246 à 253
Similitude des pyramides triangulaires..... 253 à 256
Similitude des polyèdres..... 256 à 259
Egalité et symétrie des polyèdres..... 259 à 262
Des surfaces prismatiques et cylindriques..... 262 à 265
De la sphère..... 265 à 271
Des polyèdres réguliers..... 271 à 275
Exercices sur le sixième livre..... 275 à 280

Applications.

Section d'un cylindre par un plan..... 281 et 282
Décomposition de la sphère en fuseaux..... 282 à 285
Des développements approximatifs de la sphère employés dans les cartes géographiques..... 285 à 287
De l'équerre d'arpenteur..... 287 à 289
Des polyèdres réguliers..... 289 et 290

LIVRE SEPTIÈME.

Théorie de la racine cubique..... 291 à 295
Volumes des parallélipipèdes, prismes, pyramides, troncs de pyramides, polyèdres, troncs de prismes, troncs de parallélipipèdes, de la sphère, d'un segment sphérique..... 295 à 320
Exercices sur le septième livre..... 321 à 323

Applications.

Corder une pile de bois en talus..... 325 et 326
Cuber une caisse destinée aux pierres qui servent à l'entretien des routes..... 326 à 328
Compteur à gaz..... 328 à 330
Cuber un arbre en grume..... 330 et 331

Jauger un tonneau ..... 331 et 332
Cuber un volume irrégulier ..... 332 à 334
Mesurage du poids des corps homogènes dont on peut calculer le volume ..... 334 et 335
Mesurage des volumes des corps homogènes qui peuvent être pesés 335
Poids spécifiques des principaux corps solides et liquides 335 et 336

LIVRE HUITIÈME.

Ellipse et ses applications ..... 337 à 364
Hyperbole et ses applications ..... 364 à 376
Parabole et ses applications ..... 376 à 387
Courbes d'extrados des voûtes ..... 387 à 390
Spirale d'Archimède ..... 390 à 393
Développante du cercle ..... 393 à 395
Cycloïde ..... 395 à 398
Epicycloïde ..... 398 à 400

FIN DE LA TABLE.

SBN 606586

Google

Digitized by Google

BIBLIOTECA